39 Z*

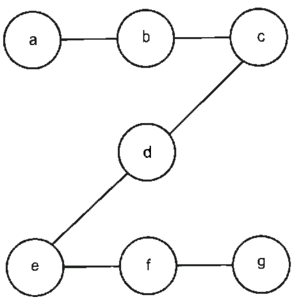
***Réponse :* 7 solutions** (ou 8 × 7 solutions).

Nous allons travailler sur le Z comme nous l'avions fait dans l'énigme 28 avec X mais cela se complique.

- Tout d'abord expliquons pourquoi 8 × 7 solutions.

Le « 8 × » vient de la commutativité de l'addition (propriété qui signifie simplement que : 3 + 5 = 5 + 3, l'ordre dans lequel on opère par multiplication sur les nombres n'a pas d'incidence sur le résultat) et du centre de symétrie de Z.

Nous traduirons le remplissage :



par a b c d e f g

Pour le problème qui nous intéresse : de la solution a b c d e f g découle 7 autres solutions « identiques » sur le plan du problème posé, ainsi on ne conservera qu'une solution parmi les 8 solutions « identiques » :

a b **c d e** f g   g f **e d c** b a
b a **c d e** f g   f g **e d c** b a
a b **c d e** g f   g f **e d c** a b
b a **c d e** g f   g f **e d c** a b

- Désignons par S la somme des 7 nombres de 1 à 7 :

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28.$

Supposons résolu le problème et désignons par s la somme d'un des segments d'un Z solution.

On peut en déduire un encadrement de s :

$28 + 1 + 2 \leq 3s \leq 28 + 6 + 7.$

28 + 1 + 2 correspond aux valeurs minimales répétées aux extrémités.

$28 + 6 + 7$ correspond aux valeurs maximales répétées aux extrémités.

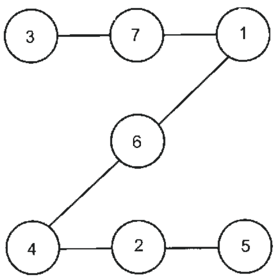
On a donc : $31 \leq 3s \leq 41$ et s étant un nombre entier, il vérifie l'encadrement : $11 \leq s \leq 13$.

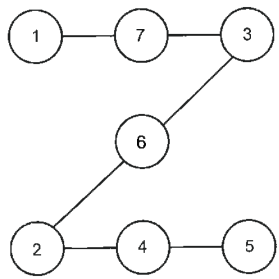
■ Recherchons les solutions telles que : $s = 11$.

On a alors : $3s = 33 = 28 + 5$.

Or $5 = 1 + 4 = 2 + 3$, les nombres répétés deux fois (les angles) sont donc 1 et 4 ou 2 et 3.

Il y a **2** solutions :



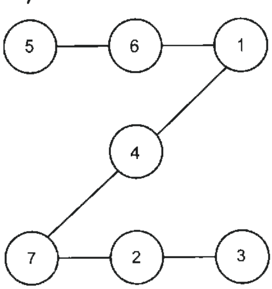


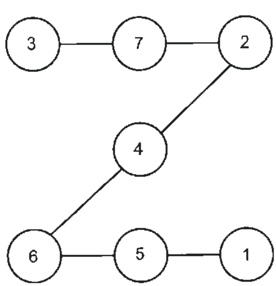
■ Recherchons les solutions telles que : $s = 12$.

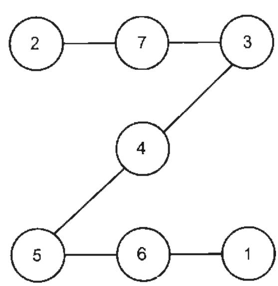
On a alors : $3s = 36 = 28 + 8$.

Or $8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5$, les nombres répétés aux angles sont donc 1 et 7 ou 2 et 6 ou 3 et 5.

Il y a **3** solutions :



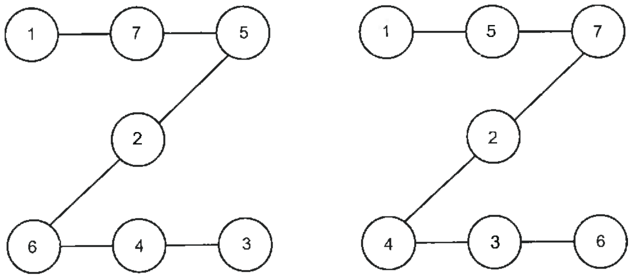




■ Recherchons les solutions telles que : $s = 13$.

On a alors : $3s = 39 = 28 + 6 + 5 = 28 + 7 + 4$, les nombres répétés aux angles sont 5 et 6 ou 4 et 7.

Il y a **2** solutions.



Au total, il y a : 2 + 3 + 2 = 7 solutions.

40 La rue Mozart

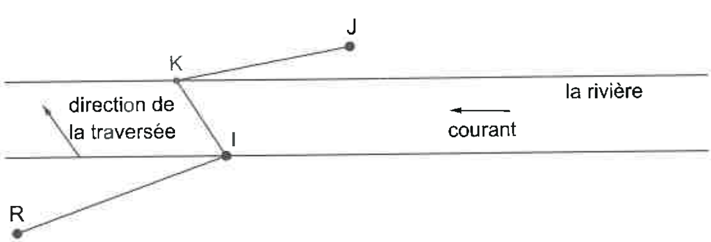
Réponse : **François était à pied !**

Affirmation fort utile

Mes frères étudiants en médecine, ont relaté un jour à la table familiale, un propos fréquent d'un de leurs professeurs : « On peut avoir la vérole **et** un bar tabac ».

41 Roméo et Juliette*

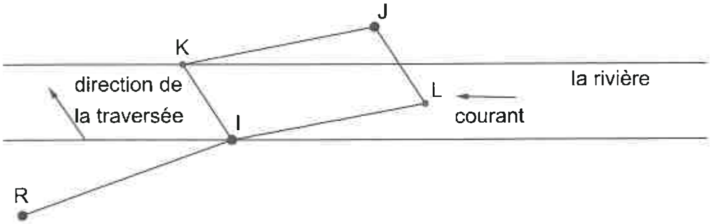
Une construction pas à pas du trajet



Si Roméo entre dans l'eau au point I, le point K de sortie de la rivière est déterminé de manière unique du fait de la direction de la traversée imposée par le courant. Et quel que soit le point I d'entrée, la longueur KI est constante. Donc minimiser le trajet de R à J revient à minimiser la somme RI + KJ.

Quand on parle de plus court chemin d'un point à un autre, on pense ligne droite.

Construisons le point L (unique quel que soit le point I) tel que IKJL soit un parallélogramme (= figure à 4 côtés, parallèles deux à deux, les côtés parallèles ont la même longueur).

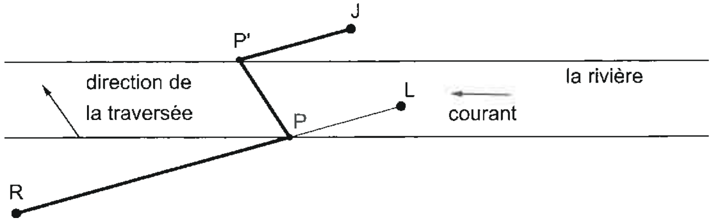


Ainsi minimiser la somme RI + KJ revient à minimiser la somme RI + IL.

Donc RI + IL est minimale si le point I est le point d'intersection de la première berge et de la droite (RL).

Nous l'appellerons P.

P' est le point d'arrivée de Roméo après sa traversée à la nage. Le trajet minimal est donc le trajet : RPP'J.



REMARQUE

On aurait pu procéder de la même façon en construisant le point M tel que RMKI soit un parallélogramme. On aurait trouvé le même trajet minimal.

42 La peste ou le choléra

Le prisonnier doit dire : « je vais être écartelé ».

Alors le bourreau, en bon logicien, se trouve confronté au paradoxe suivant : s'il écartèle le prisonnier, l'affirmation de celui-ci est vraie et donc le bourreau devrait le brûler vif. Mais s'il le brûle vif, l'affirmation du prisonnier serait fausse.

En bon logicien, le bourreau doit laisser la vie sauve au prisonnier !

43 Télé réalité*

Le candidat doit changer son premier choix pour augmenter sa chance de gagner.

Le premier choix du candidat lui permet de gagner avec une probabilité $\frac{1}{3}$ du fait de l'hypothèse d'équiprobabilité.

Une fois que le présentateur a ouvert une porte autre que celle choisie et autre que celle derrière laquelle se trouve la voiture, la probabilité du premier choix ne change pas, elle vaut toujours $\frac{1}{3}$. Il ne reste plus qu'une autre porte à ouvrir, donc elle permet de gagner avec une probabilité égale à $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, le candidat doit changer son premier choix pour cette porte.

44 Multiplier = additionner

Il existe une infinité de couples de nombres entiers ou fractionnaires répondant à la question. Quelle infinité ?

Lisez la suite.

Cherchons des cas particuliers, par exemple, les nombres entiers tels que leur carré égale leur double.

On a bien sûr $2 \times 2 = 2 + 2$.

Et 2 est le seul entier possible car la table de 2 file beaucoup moins vite que les tables de 3, 4, 5,... j'entends par là :

$3 \times 3 > 2 \times 3 \qquad 4 \times 4 > 2 \times 4 \qquad$ etc.

Cherchons maintenant des couples où le premier élément du couple est un entier supérieur ou égal à 3 :

$3 \times ? = 3 + ?$ donc $2 \times ? = 3$ et $? = 3 \div 2 = 1{,}5$

$(3\,;1{,}5)$ est une solution.

$4 \times ? = 4 + ?$ donc $3 \times ? = 4$ et $? = 4 \div 3 = \dfrac{4}{3}$...

$\left(4\,;\dfrac{4}{3}\right)$ est une solution.

On peut généraliser : soit un nombre fractionnaire a le premier terme du couple cherché, nécessairement différent de 1, le deuxième élément est $\dfrac{a}{a-1}$, nombre fractionnaire lui aussi.

Vérifions :

$$a+\frac{a}{a-1}=\frac{a(a-1)+a}{a-1}=\frac{a^2-a+a}{a-1}=\frac{a^2}{a-1}=a\times\frac{a}{a-1}$$

Par le « tout algèbre »

Analyse : soit $(a\,;b)$ un couple solution, nécessairement on a :

$$a\times b=a+b \Leftrightarrow a\times b-b=a \Leftrightarrow b(a-1)=a \Leftrightarrow b=\frac{a}{a-1}$$

car $b = 1$ est exclu.

Synthèse : on reprend la vérification faite précédemment.

L'ensemble des solutions est l'ensemble des couples $\left(a\,;\dfrac{a}{a-1}\right)$, a étant un nombre fractionnaire quelconque différent de 1.

REMARQUE

Il est difficile de ne pas passer par l'algèbre pour une solution rapidement exprimée, mais il est bon, pour les enfants, de commencer la recherche par des exemples.

45 Contre ou avec le vent

Sans vent, le cycliste ferait 1 kilomètre en 3 minutes et $\frac{3}{7}$ de minute.

Attention ! Le vent a aidé le cycliste pendant 3 minutes à l'aller et l'a retardé au retour pendant 4 minutes !

Pour « neutraliser » l'effet du vent, il faut déterminer les distances parcourues avec le vent dans le dos et avec le vent de face pendant *la même durée.*

Le cycliste fait 1 km en 3 minutes avec le vent dans le dos, donc il parcourt 1 km 1/3 en 4 minutes avec le vent dans le dos.

Ainsi, le cycliste parcourt 2 km 1/3 en 8 minutes réparties en 4 minutes avec le vent dans le dos, et 4 minutes avec le vent de face. On peut donc faire abstraction du vent.

Le cycliste, sans vent, parcourt 1 km en :

$$\frac{8}{2\text{ km }1/3}=\frac{8}{\frac{7}{3}}=\frac{24}{7}=3\text{min}\frac{3}{7}.$$

46 Nicolas et Alexis*

***Réponse :* 9 ans, 2 ans, 2 ans.**

Écrivons toutes les écritures multiplicatives de 36 en trois facteurs décroissants et à côté la somme des trois âges correspondant :

36 = 36 × 1 × 1	38
36 = 18 × 2 × 1	21
36 = 12 × 3 × 1	16
36 = 9 × 4 × 1	14
36 = 9 × 2 × 2	13
36 = 6 × 6 × 1	13
36 = 6 × 3 × 2	11
36 = 4 × 3 × 3	10

Le numéro de la maison d'en face est 13, sinon Alexis trouverait à ce moment-là. La décomposition 6 × 6 × 1 entraîne qu'il y a deux aînées jumelles, donc la seule solution possible est 9 ans, 2 ans, 2 ans.

47 Madame O'Toole

Le bébé pèse 25 livres.

Justification

Utilisons une balance Roberval, pour traduire les égalités de l'énoncé et évoluer vers la solution.

$$\underbrace{170}\uparrow\underbrace{\text{Mme O'Toole + Bébé + le chien}}$$

$$\underbrace{170}\uparrow\underbrace{\text{(100 + Bébé + le chien) + Bébé + le chien}}$$

$$\underbrace{170}\uparrow\underbrace{\text{(100 + Bébé + le chien) + Bébé + le chien}}$$

$$\underbrace{100}\uparrow\underbrace{\text{2 Bébés + 2 chiens}}$$

$$\underbrace{70}\uparrow\underbrace{\text{2 Bébés + 2 (Bébé} - \text{60 \% de Bébé)}}$$

$$\underbrace{70}\uparrow\underbrace{\text{2,8 Bébés}}$$

Donc le bébé pèse : $\dfrac{70}{2,8}=25.$

REMARQUE

Les algébristes peuvent bien sûr utiliser la mise en équation et la résoudre.

Vocabulaire

3 de plus – 3 de moins – 3 fois plus – 3 fois moins – au moins 3 – moins de 3 – au plus 3 – plus de 3.

De quoi avoir la migraine !

Dans chacune des quatre premières expressions, quelle opération est en jeu ?

Utilisons des exemples :

- Sylvain a 5 billes, Joya en a 3 de plus, c'est-à-dire elle a : 5 + 3 = 8 billes.
- Solène a 5 ans, Elise en a 3 de moins, c'est-à-dire elle a : 5 – 3 = 2 ans.

- Romain mange 5 bonbons, Adèle en mange 3 fois plus, c'est-à-dire : $3 \times 5 = 15$ bonbons.
- Anne-Sibylle mesure 174 cm, Thomas mesure 3 fois moins, c'est-à-dire : $174/3 = 58$ cm.

Signification des 4 dernières expressions sur des exemples :

- Il y a au moins 3 pommes par kilo, c'est-à-dire il y en a un nombre supérieur à 3.
- Il y a moins de 5 pommes par kilo, c'est-à-dire il y en a un nombre inférieur à 3.
- Il y a au plus 3 pommes par kilo, c'est-à-dire il y en a un nombre inférieur à 3.
- Il y a plus de 5 pommes par kilo, c'est-à-dire il y en a un nombre supérieur à 5.

48 Lewis Caroll

10 % au moins des combattants ont perdu une oreille, un œil, un bras et une jambe.

Plutôt que de manipuler des pourcentages, comptons des combattants, c'est plus humain, non ?

Parmi 100 combattants, il y en a 85 qui ont perdu une oreille, 80 qui ont perdu un œil, donc il y en a qui ont perdu une oreille et un œil : au moins $(80 + 85) - 100 = 65$.

Parmi 100 combattants, il y en a au moins 65 qui ont perdu une oreille et un œil, 75 qui ont perdu un bras, donc il y en a au moins $(75 + 65) - 100 = 40$ qui ont perdu une oreille, un œil et un bras.

Parmi 100 combattants, il y en a au moins 40 qui ont perdu une oreille, un œil et un bras, 70 qui ont perdu une jambe, donc il y en a au moins $(40 + 70) - 100 = 10$ qui ont perdu une oreille, un œil, un bras et une jambe.

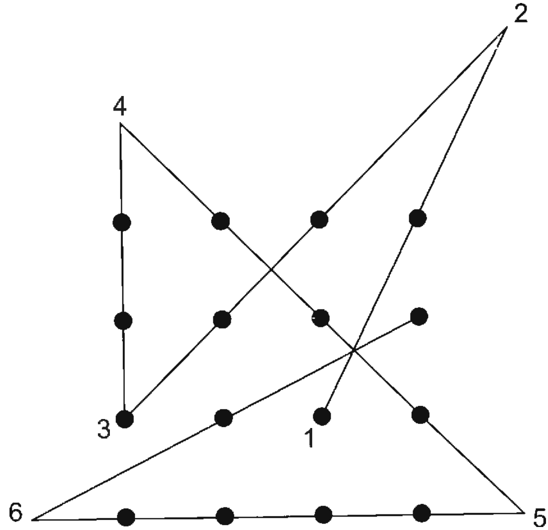
On revient sans difficulté aux pourcentages.

Lewis Caroll (1832-1898) de son véritable nom Charles Lutwidge Dodgson fut un romancier, photographe, professeur de mathématiques anglais. Auteur du célèbre et délicieux *Alice, au Pays des Merveilles.*

« Mais alors, dit Alice, si le monde n'a absolument aucun sens, qui nous empêche d'en inventer un ? »

49 Toujours des p'tits points...

Une façon de répondre à l'énigme



50 Grenier et cave

Dans la cave d'une maison se trouvent 3 interrupteurs électriques en position « éteint ». Un seul de ces interrupteurs commande l'ampoule du grenier.

Depuis la cave, comment pouvez-vous faire pour savoir quel interrupteur est relié au grenier en ne vous rendant dans cette pièce qu'une seule fois ?

Démarche, réponse

- Si je mets les 3 interrupteurs sur « allumé », bien sûr le grenier sera éclairé, mais par quel interrupteur ?
- Je mets 2 des 3 interrupteurs sur « allumé », je grimpe au grenier. Si, par hasard, le grenier n'est pas éclairé, alors je détermine l'interrupteur du grenier, mais si le grenier est allumé, je ne peux pas conclure. Et je n'ai droit qu'à une seule manip., donc ce n'est pas la bonne, a priori.
- Je mets 1 des 3 interrupteurs sur « allumé », pas jouable, pas besoin de s'étendre !

Hum, bon, problème insoluble ?

Intuitivement, on sent bien que la démarche exposée précédemment est un peu simpliste, non ?

Il faut tirer davantage d'information du texte.

Un petit détour chez les physiciens : l'électricité produit de la lumière et... de la chaleur. Souvenez-vous, on peut avoir la vérole et... un bar tabac !

Procédons ainsi :

Dans la cave, je positionne deux interrupteurs sur « allumé » un certain temps. Puis j'en mets un des deux sur « éteint » et je grimpe quatre à quatre au grenier.

Soit le grenier est éclairé, c'est l'interrupteur resté sur « allumé » qui est celui du grenier.

Soit l'ampoule du grenier est chaude ! C'est l'interrupteur qui a été allumé puis éteint.

Soit l'ampoule n'est ni éclairée, ni chaude, c'est le troisième interrupteur jamais allumé, le bon.

> *Ce que fait l'individu, la communauté le fait. D'une classe à l'autre on se condamne, en gardant pour soi seul l'absolution. Le haut méprise le bas ; le bas déteste le haut. La cave dit : le grenier est sale ; le grenier dit : la cave est noire. Nous sommes tous le grenier ; or, nous sommes tous la cave et, en regardant un autre, c'est soi-même qu'on regarde. Au fond, on le sent ; on se l'avoue dans l'intimité du monologue ; et l'on hait le philosophe sincère qui fait les confrontations. Les laideurs n'aiment point les miroirs.*
>
> Victor Hugo, *Fragments philosophiques*.

51 Un bon p'tit repas entre amis

Le premier ami reçoit 7 € et le second 1 €.

- Une part du repas coûte 8 €, donc le repas coûte 3 × 8 = 24 €.
- Le repas est constitué de 8 plats valant chacun le même prix, c'est-à-dire : 24 ÷ 8 = 3 €.
- Le premier ami a donc (en plus de tout l'amour avec lequel il a cuisiné) contribué à la hauteur de 5 × 3 = 15 €, le deuxième à la hauteur de 3 × 3 = 9 €.

  Pour rétablir l'équilibre financier, les 8 € sont répartis ainsi :

  pour le premier : 15 – 8 = 7 €, le deuxième : 9 – 8 = 1 €.

52 Fratrie

Non, la moitié des familles de quatre enfants ne sont pas des familles bien réparties.

Justification

1. Il y a 4 répartitions équiprobables des enfants d'une famille de quatre enfants :

(F, F) (G, G) (F, G) (G, F).

Il y a 2 répartitions bien réparties parmi les 4 types, donc une proportion égale à $\frac{1}{2}$.

2. Déterminons tranquilou, methodou tous les types de répartitions équiprobables :

GGGG	GGGF	**GGFF**	GFFF	FFFF
	GGFG	**GFGF**	FGFF	
	GFGG	**GFFG**	FFGF	
	FGGG	**FGGF**	FFFG	
		FGFG		
		FFGG		

Il y a 6 répartitions bien réparties parmi 16 répartitions au total, donc une proportion égale à $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$. Elle est inférieure à $\frac{1}{2}$.

53 Mettre de l'eau dans son vin

Il y a autant d'eau dans le vin que de vin dans l'eau.

Justification

Suite aux deux transvasements, les quantités de liquides dans les deux verres sont respectivement identiques aux quantités avant transvasements.

La quantité manquante de vin dans le verre à vin est égale à la quantité d'eau la remplaçant et à la quantité de vin transvasée dans le verre à eau.

Il y a donc autant d'eau dans le vin que de vin dans l'eau.

54 Le nénuphar

Les deux nénuphars recouvrent le lac en un mois moins un jour.

Justification

En un mois, tout le lac est recouvert et le nénuphar double de taille tous les jours, donc en un mois moins un jour, le nénuphar couvre la moitié du lac. D'où la réponse.

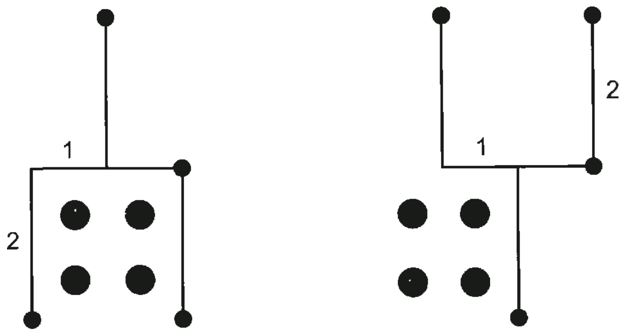
La légende de l'échiquier de Sissa ou le problème de grains de riz sur un échiquier

Cette légende remonte à 3000 ans avant J.-C.

Le roi des Indes Belkid veut récompenser Sissa qui a inventé le jeu d'échecs avec notamment l'échiquier à 64 cases en mettant une pièce d'or dans chaque case. Sissa refuse et demande au roi de déposer un grain de riz sur la première case, deux sur la deuxième case, quatre sur la troisième et ainsi de suite en doublant la quantité de grains à chaque case. Belkid accepta tout de suite amenant son royaume... à sa perte.

Pourquoi ? Je vous fais grâce des calculs, il faut mettre sur l'échiquier $2^{64} - 1$ grains de riz, qui pèsent 720 000 millions de tonnes ! En 2010 la production mondiale de riz était de 690 millions de tonnes.

55 Billes et allumettes



On fait glisser vers la droite, l'allumette 1 sur elle-même d'une longueur égale à la moitié d'elle-même. Puis on déplace l'allumette 2 comme indiqué sur le schéma. Les deux autres allumettes restent à leur place.

56 Valse de verres*

A, B, C, D représentent les 4 verres pleins.

1, 2, 3, 4 représentent les 4 verres vides.

Position de départ :	A	B	C	D	1	2	3	4		
1er mouvement :	A			D	1	2	3	4	B	C
2e mouvement :	A	1	2	D			3	4	B	C
3e mouvement :	A	1	2	D	4	B	3			C
4e mouvement :			2	D	4	B	3	A	1	C

57 Châteaux de cartes*

Réponse : 15 050.

Une façon de compter (il y en a d'autres! envoyez les moi!)

Château à 1 étage

2 cartes

Château à 2 étages

(2+ 2+3) cartes

Château 3 étages

(2+2+3+2+2×3) cartes

Le château à 1 étage utilise 2 cartes.

Dans le château à 2 étages, est mis en évidence en caractère gras, un château à 1 étage que l'on complète avec (2 + 3) cartes.

Dans le château à 3 étages, est mis en évidence en caractère gras, un château à 2 étages que l'on complète par (2 + 2 × 3) cartes.

De manière générale, dans un château à n étages, est mis en évidence un château à $(n-1)$ étages que l'on complète par $(2 + (n-1) \times 3)$ cartes.

Calculons au total combien il faut de cartes pour un château à 100 étages :

$$\begin{array}{l} \ \ 2 \\ +2+3 \\ +2+2\times 3 \\ +2+3\times 3 \\ +\ldots\ldots \\ +2+99\times 3 \\ \hline 2\times 100+3\times(1+2+3+\ldots.99) \end{array}$$

Une légende que l'on se raconte

Le jeune Carl Friedrich Gauss (1777-1855) qui allait devenir un très grand mathématicien allemand, à l'âge de 9 ans, a stupéfié son maître d'école en calculant la somme des 100 premiers entiers que l'on appelle S, S = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100.

Comment a-t-il procédé ?

En écrivant S de deux manières différentes : en ordre croissant puis en ordre décroissant, puis en additionnant en colonnes :

$$\begin{array}{lcccccccccc} S = & 1 & + & 2 & + & 3 & +\ldots\ldots+ & 99 & + & 100 \\ + & + & & + & & + & & + & & + \\ S = & 100 & + & 99 & + & 98 & +\ldots\ldots+ & 2 & + & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$2S = (1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots\ldots+(99+2)+(100+1)$$

$2S = 100 \times 101$ et donc $S = \dfrac{100 \times 101}{2} = 5050$

Revenons à nos châteaux de cartes :

$$2 \times 100 + 3 \times (1+2+3+\ldots.99) = 200 + 3 \times \frac{99 \times 100}{2} = 15\,050$$

58 Sens et contre-sens

Le tapis roulant mesure environ 16,39 m.

Explication

La relation entre vitesse V, distance D et temps T est :

$V = \dfrac{D}{T}$ c'est-à-dire $D = V \times T$.

Soit V_R la vitesse du tapis roulant exprimée en mètre par seconde, V_P la vitesse de Romain exprimée en mètre par seconde, X la longueur du tapis roulant exprimée en mètre.

On a : $X = (V_R + V_P) \times 6$ (a)

$X = (V_P - V_R) \times 360$ (b)

$V_P = \dfrac{500}{360}$ (c)

En multipliant (a) par 60 : $60\,X = (V_R + V_P) \times 360$.

Puis en additionnant (b) : $61\,X = 720\,V_P$.

En remplaçant V_P par sa valeur donnée en (c), on obtient :

$$X = \frac{720}{61}\,\frac{500}{360} \approx 16{,}39\,\text{m}.$$

59 Hypocrisie politique

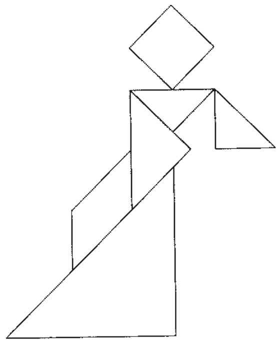
Une stratégie du Premier Ministre

Partons de l'hypothèse qu'il y a « partez » sur les deux papiers.

Le Premier Ministre ne peut pas frontalement le dire au Président, ben non, il lui faut ruser et surtout renvoyer la balle au Président.

Ainsi, le Premier Ministre prend l'un des papiers, en fait une boulette et l'avale, précisant que c'est le papier choisi. Dépliant ensuite le second papier sur lequel est écrit « partez », le Président est coincé par sa propre malhonnêteté.

60 Le Tangram



Vous trouverez de nombreuses silhouettes à décomposer sur Internet ou en vous procurant un jeu commercialisé.

On peut aussi jouer au Tangram en se proposant de fabriquer les silhouettes avec les 7 pièces, par exemple un château, un chat, un parallélogramme, etc.