Corrigés des énigmes

1 L'escargot de Bourgogne

Une façon de raisonner pragmatique, pas à pas

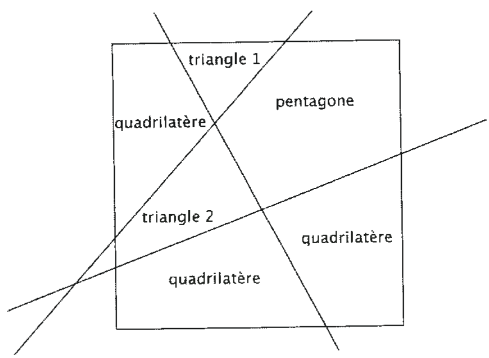
La réponse est **mercredi soir**.

Le mardi matin (un jour et une nuit se sont écoulés) l'escargot s'est élevé à 1 mètre du sol. Le mercredi matin, il est à 2 mètres du sol. Le mercredi soir, il est en haut du mur.

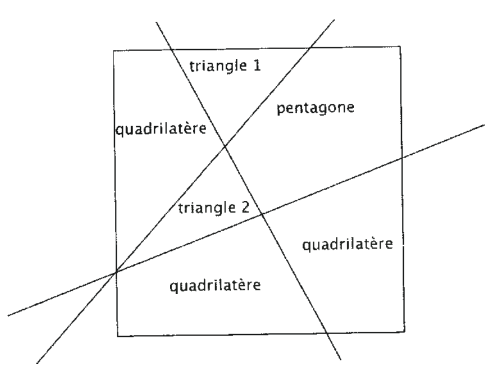
2 Partition contrainte du rectangle

Procédé par essai-rectification

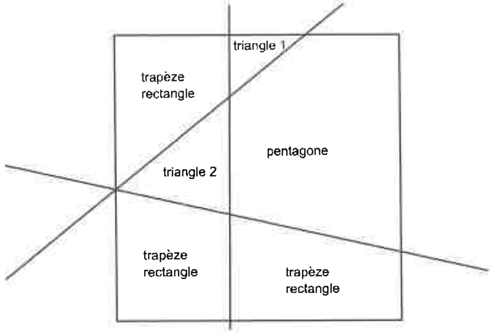
1. Je dessine un rectangle, puis 3 droites coupant ce rectangle.



2. Le triangle 2 n'est pas à l'intérieur du rectangle. Donc je rectifie pour qu'il le soit.



3. Les 3 quadrilatères doivent devenir des trapèzes rectangles. Donc je rectifie en traçant des droites perpendiculaires.



3 Roberval et numérique

Descriptifs d'un procédé de détermination de la pièce la plus lourde

1. Avec une balance Roberval

1re étape : cherchons à déterminer le lot de 8 pièces contenant la pièce la plus lourde.

On partage le lot de 24 pièces en 3 paquets de 8 pièces. (On s'est vite rendu compte qu'un premier pesage de la moitié des pièces nécessiterait plus de 3 utilisations de la Roberval.)

- 1re utilisation de la balance de Roberval : on compare les masses de 2 des 3 paquets de 8 pièces.

  Soit la balance est équilibrée, ils ont donc la même masse, la pièce la plus lourde est dans le 3e paquet.

  Soit la balance est déséquilibrée, le plateau le plus bas supporte le paquet contenant la pièce la plus lourde.

  On travaille désormais avec 8 pièces, l'une étant la plus lourde.

  On partage ce lot de 8 pièces en 3 paquets de respectivement 3-3-2 pièces.

2e étape : détermination du paquet contenant la pièce la plus lourde.

- 2e utilisation de la balance Roberval : on compare les masses des 2 paquets de 3 pièces.

  Soit la balance est équilibrée, la pièce la plus lourde est donc dans le paquet de 2.

  Soit la balance est déséquilibrée, le plateau le plus bas supporte le paquet de 3 contenant la pièce la plus lourde.

  On travaille désormais avec un lot de 3 pièces ou un lot de 2 pièces.

- 3e et dernière utilisation de la balance Roberval : inutile de vous expliquer, hein ?

2. Avec une balance électronique

On pèse une pièce au hasard : 1 pesée, et on désigne par p le poids de cette pièce.

On pèse les 24 autres : 1 pesée, et on désigne par P le poids de ces 24 pièces.

• 1er cas : $24 \times p < P$ alors la pièce pesée au hasard n'est pas la plus lourde et la plus lourde pèsera donc : $P - 23 \times p$.

• 2e cas : $24 \times p > P$ alors la pièce pesée au hasard est la plus lourde.

Dans les 2 cas, il faut **deux pesées numériques** pour déterminer le poids de la pièce la plus lourde.

4 Le loup, la chèvre et le chou

La meilleure façon de s'y prendre

Lulu fait traverser la chèvre dans sa barque. Il retourne sur l'autre rive et fait traverser le chou. Il dépose le chou et reprend la chèvre, ben oui, sinon gr... gr... la chèvre se régalerait. Il dépose la chèvre et prend le loup qu'il fait traverser et laisse avec le chou sur la rive à atteindre. Il repart à vide et va rechercher la chèvre. Ça y est ! À lui maintenant de surveiller et le loup et la chèvre !

REMARQUE

Le chou n'intéresse pas le loup, et le pauv'chou n'agresse personne !

5 Mon fils s'appelle Lucas

Préliminaires

- Les relevés statistiques indiquent, qu'en arrondissant, il y a autant de naissances de filles que de naissances de garçons, dans la population mondiale normale (j'entends par normale, en excluant par exemple, les peuples qui font avorter les femmes portant des filles).
- À partir de cette donnée statistique, on peut dire que la probabilité d'avoir une fille est égale à la probabilité d'avoir un garçon, et ces probabilités sont égales à 1/2.

  100 % des culs de jatte n'ont pas de jambe droite ! X % de la population mondiale n'a pas de jambe droite. On peut espérer que X est très nettement inférieur à 1.

  Une première population de référence est la population des familles de 2 enfants. Cet ensemble est formé de 4 parties égales en nombre : les familles F-F, F-G, G-F, G-G.

  Mon ami me dit avoir un garçon Lucas, donc la population de référence devient alors la population des familles F-G, G-F, G-G, ces parties étant égales en nombre.

  La probabilité que son deuxième enfant soit une fille est donc égale à $\frac{2}{3}$.

REMARQUE

Les pourcentages sont utilisés par certains (en particulier les commerciaux ou les politiques) à des fins fallacieuses. Soyons toujours attentifs **à quelle population précisément** s'applique le pourcentage avancé.

6 La cruche

Une solution

12 0 0

Au départ

5 7 0

On remplit à ras bord la cruche de 7 l à l'aide des 12 l d'eau de la cruche de 12 l.

5 3 4

On remplit à ras bord la cruche de 4 l à l'aide des 7 l d'eau de la cruche de 7 l.

9 3 0

On verse les 4 l d'eau de la cruche de 4 l dans la cruche de 12 l.

9 0 3

On verse les 3 l d'eau de la cruche de 7 l dans la cruche de 4 l.

2 7 3

On remplit à ras bord la cruche de 7 l à l'aide des 9 l d'eau de la cruche de 12 l

2 6 4

Finissez !

REMARQUE

Difficiles de théoriser cette solution trouvée intuitivement, portée par l'idée de ne jamais revenir à une étape précédente.

7 MAÂT arrose les lys

On « mathématifie » le problème, sinon on ne peut pas répondre !

En effet, il y a sûrement des monticules dans le jardin, des obstacles à contourner ! Aucune information ne nous est fournie donc on simplifie ! On considère que le trajet de MAÂT se fait sur une surface nue parfaitement plane.

Et là, on rejoint Euclide et ses éléments qui nous façonnent depuis des siècles :

« Dans le plan, le plus court chemin d'un point à un autre est la ligne droite. »

Oui, c'est bien gentil, mais ici notre ligne est brisée : AR puis RL.

R est le nom que l'on a donné à la rivière, abusivement (et oui, c'est abuser ! Le B.A.BA en mathématiques : ne pas désigner par le même nom deux objets différents. Mais c'est si bon parfois d'abuser ! Quand bien sûr, on se comprend ! Et que l'abus simplifie la vie ! Et oui, simplifier, c'est l'obsession des mathématiciens !)

R désignera le point (l'endroit où l'on puise l'eau avec un arrosoir est plus gros qu'un point, mais souvenez vous, on simplifie !) où MAÂT puisera l'eau pour minimiser son trajet.

Notre problème est donc de minimiser cette somme AR + RL.

Si l'Abri était dans l'eau, ben on n'aurait pas de difficulté : on tracerait le segment [AL] et le point R serait déterminé. Et oui, mais l'Abri n'est pas dans l'eau et là, pas question d'abuser... En revanche, je vais chercher un point A' (se lit : « A prime ») dans l'eau tel que la distance AR est égale à la distance A'R, R étant un point quelconque du bord de la rivière.

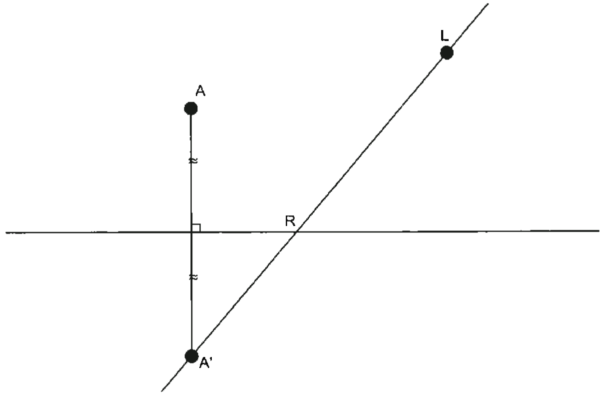
Dans mon monde « simplifié », je peux faire des choses extraordinaires : je plie le jardin le long de la ligne droite que constitue le bord de la Rivière. Vous êtes bluffés par la force imaginaire, hein ? Et le point A vient se poser en un point A' à l'intérieur de la rivière. Vous voyez ? Regardez bien ! La distance entre A, l'Abri et n'importe quel point R du bord de la Rivière est égale à la distance entre A' et ce point R. Ça y est, j'ai trouvé !

Je vous entends, ricaner ? Hum, ouais, elle voit ça en rêve ! Mais en pratique comment on va déterminer ce point A' ?

En 5^{e}, vous avez été élève en classe de maths ?

Médiatrice, symétrie axiale ou orthogonale, sont quelque part dans votre mémoire, non ?

Et oui, le point A' est le symétrique du point A par rapport à la droite symbolisant le bord de la rivière. On peut le construire à l'aide d'une règle graduée et une équerre ou bien à l'aide d'un compas seul. Réveillez vos souvenirs !



8 Pêcheurs et poissons*

Une démonstration

On classe les 7 pêcheurs en fonction du nombre de poissons qu'ils ont pêché, dans l'ordre décroissant (i.e. le 1er pêcheur de ce classement est celui qui a pêché le plus de poissons, le 2e pêcheur, etc.).

Montrons que les 3 premiers de ce classement ont au moins pêché 50 poissons.

REMARQUE

En moyenne, chaque pêcheur a pris 14,29 poissons.

Distinguons 2 cas.

1er cas : le 3e du classement a pêché au moins 16 poissons (i.e. 16 ou 17 ou 18 ou etc.).

On en déduit que le 2e du classement a pêché au moins 17 poissons et le 1er au moins 18 poissons.

Au total : les 3 premiers pêcheurs du classement ont pêché ensemble au moins : 16 + 17 + 18 = 51 poissons.

2e cas : le 3e du classement a pêché au plus 15 poissons (i.e. 15 ou 14 ou 13 ou etc.).

On en déduit que le 4e du classement a pêché au plus 14 poissons, le 5e au plus 13 poissons, le 6e au plus 12, le 7e au plus 11.

Au total : les 4 derniers pêcheurs du classement ont pêché ensemble au plus : 14 + 13 + 12 + 11 = 50 poissons.

On en déduit alors que les 3 premiers du classement ont pêché ensemble au moins 50 poissons.

Complément mathématique

La démonstration proposée utilise le procédé de raisonnement, appelé ***raisonnement par disjonction des cas***. Pour démontrer une propriété par disjonction des cas, on la prouve dans un nombre fini de cas, ces cas couvrant tous les cas possibles.

9 20 % – 20 % ≠ 0

Réponse : **960 000**

Bien sûr, vous avez trouvé ! Car vous avez retenu la vigilance recommandée à l'énigme 5.

À quel nombre applique-t-on le pourcentage ?

La 1re année : la population est de 1 000 000 + 20 % de 1 000 000 = 1 200 000.

La 2e année : la baisse de 20 % s'applique à la population de fin de 1re année, c'est-à-dire à 1 200 000.

Ainsi, en fin de 2e année, la population est de 1 200 000 – 20 % de 1 200 000 = 960 000.

10 Un autre Archimède

Réponse : **La baignoire débordera, vidange ouverte, au bout de 6 minutes.**

Explications

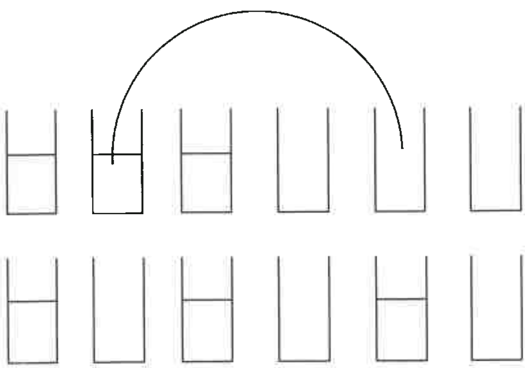
Version fractionnaire : en 1 minute, la baignoire, vidange ouverte, se remplit de : 1/3 – 1/6 = 1/6. Elle sera donc remplie en 6 minutes.

Version littéraire : la baignoire se vide deux fois plus lentement qu'elle ne se remplit. Lorsque le robinet et la vidange sont ouverts en même temps, l'eau qui fuit par la vidange représente la moitié de l'eau qui arrive par le robinet. Seule la moitié reste dans la baignoire, qui se remplit deux fois moins vite que si la vidange était fermée. La baignoire débordera donc au bout de 6 minutes.

11 Renversant !

Oui, on peut !

On déplace le verre n° 2, on le vide dans le verre n° 5, puis on le replace en position 2, vide.



REMARQUE

L'énoncé est volontairement abstrait. Un petit croquis pour l'illustrer ? Mieux ici, sortir 6 verres, les remplir d'un délicieux breuvage, les aligner comme demande l'énoncé. Le bon sens pratique fait le reste ! Trinquez à votre réussite !

12 Pentagones*

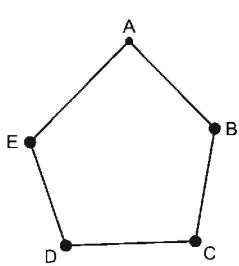


Fig. 1 : 10 possibilités

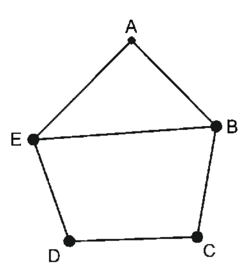


Fig. 2 : 2 possibilités

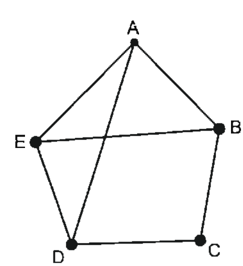


Fig. 3 : 0 possibilité

Une démonstration de la réponse

1 n'a pas de prédécesseur, 5 n'a pas de suivant.

2-3-4 jouent des rôles symétriques sur le plan des prédécesseurs et suivants.

REMARQUE

On peut faire une partition de la suite 1-2-3-4-5, en 1-5 et 2-3-4.

Cas de figure 1

Dans ce cas de figure, chaque sommet est relié à deux autres sommets. Donc on peut mettre n'importe lequel des cinq entiers 1-2-3-4-5 sur n'importe lequel des sommets A-B-C-D-E.

– Plaçons 1 en A. 2 peut être en D (alors B = 3, C = 5, E = 4) ou 2 peut être en C (alors E = 3, D = 5, B = 4) : on a ainsi 2 répartitions. De la même façon, en plaçant 5 en A, on trouverait 2 autres répartitions.

– Plaçons 2 en A. 1 et 3 les deux voisins de 2, doivent être en D et C.

Si D = 1, alors C = 3, B = 5, E = 4. Si D = 3, alors C = 1, B = 4, E = 5. On a ainsi 2 répartitions possibles. De la même façon, en plaçant 3 ou 4 en A, on trouverait 2 possibilités.

Au total, on a : 2 × 2 + 3 × 2 = **10 possibilités**.

Cas de figure 2

L'énoncé de recherche est le même pour les trois figures. Le segment EB entraîne une contrainte supplémentaire par rapport à la figure 1, le nombre de partitions pour la figure 2 sera donc inférieur à celui de la figure 1.

La remarque sur la partition 1-5 et 2-3-4 reste bien sûr valable.

REMARQUES

Dans la figure 2, on peut faire une partition des 5 sommets en A-D-C et E-B.

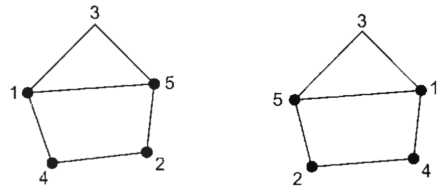
A, D et C sont respectivement reliés à deux autres sommets. E et B sont respectivement reliés à trois autres sommets.

– Éliminons ! Les entiers 2, 3, 4 ne peuvent pas se positionner sur les sommets E et C. En effet, par exemple, E = 2, donc 1 et 3 devraient occuper tous les deux le sommet C.

– Si E = 1 alors B = 5, D = 4, A = 3, C = 2 : 1 possibilité.

Par symétrie, E = 5 donne 1 possibilité.

Au total : **2 possibilités**



Cas de figure 3

Les considérations faites pour les recherches sur les figures 1 et 2 restent valables.

Les possibilités pour la figure 12.3 sont des possibilités de la figure 12.2.

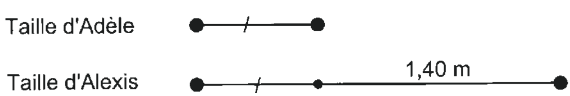
Le segment AD dessiné entraîne qu'il y a **0 possibilité** pour la figure 12.3.

13 Adèle, Solène et Alexis

Réponse : **1,90 m**

Deux démonstrations

Par un petit schéma



Adèle mesure : (2,40 – 1,40) ÷ 2 = 0,50 m donc Alexis mesure :
0,50 + 1,40 = **1,90 m.**

Par l'algèbre

On désigne par a la taille d'Adèle et A la taille d'Alexis.

Les deux équations : $A + a = 2,40$ et $a = A - 1,40$ traduisent l'énoncé.

On remplace a par son expression en fonction de A dans la première équation :

$A + A - 1,40 = 2,40$

On résout : $2A = 3,80$ donc $\boldsymbol{A = 1,90}$ **m** et $a = 50$ cm.

REMARQUE

Quand on a pratiqué un peu d'algèbre, on a parfois tendance à en abuser, ici un 'tit croquis fait très bien l'affaire !

14 Chiffre ton signe

Ajouter un bâton au premier signe + :

848 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 888

15 Paires de chaussettes

La probabilité est nulle !

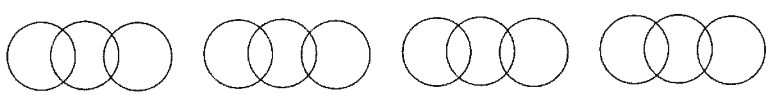
Ben, c'est bien sûr ! Les 6 paires de chaussettes sont de couleurs différentes, 5 paires sont bien reconstituées, les deux dernières chaussettes ont nécessairement la même couleur.

16 Anneaux brisés

3 anneaux

Comment procéder ?

On ouvre les 3 anneaux d'un même morceau et l'on se sert de chacun des 3 anneaux pour réunir les 4 autres morceaux :



Menus propos sur la recherche

Dans un premier temps, j'aligne les 5 morceaux, il y a 4 attaches à faire, j'ouvre 4 anneaux, je soude et la chaîne est réparée !

Trop facile ce problème ! Le doute arrive !

La réponse n'est sûrement pas 4, donc elle est inférieure à 4 :

3, 2 ou 1 ?

2 ou 1, ce n'est pas possible.

Je me fixe 3 pour résoudre le problème. Hum, c'est le problème des poteaux et des intervalles, il y a 4 intervalles, il faut 4 anneaux. Il faut donc IMPÉRATIVEMENT 3 intervalles. J'aligne 4 morceaux, les 3 intervalles apparaissent, j'ai le 5^{e} morceau à la main et tout naturellement j'ouvre les 3 anneaux de ce morceau et les place sur les 3 intervalles, je soude et la chaîne est rétablie !

17 Hexagones*

60 possibilités

Une justification

De la routine ! Si vous avez résolu l'énigme 12 avec les pentagones.

On peut calculer le nombre total de possibilités en dénombrant tous les cas où A = 1, tous les cas où B = 1, etc.

Or les 6 sommets sont « interchangeables » donc il suffit de dénombrer le nombre de possibilités où A = 1 puis de multiplier le résultat obtenu par 6.

A = 1 donc C = 2 ou D = 2 ou E = 2.

Tranquillou, méthodou

A = 1	C = 2	E = 3	B = 4	D = 5	F = 6
A = 1	C = 2	E = 3	B = 4	D = 6	F = 5
A = 1	C = 2	F = 3	D = 4	E = 6	B = 5
A = 1	D = 2	B = 3	E = 4	F = 6	C = 5
A = 1	D = 2	B = 3	F = 4	E = 6	C = 5
A = 1	D = 2	F = 3	B = 4	C = 6	E = 5
A = 1	D = 2	F = 3	C = 4	B = 6	E = 5
A = 1	E = 2	B = 3	D = 4	F = 5	C = 6
A = 1	E = 2	C = 3	F = 4	B = 5	D = 6
A = 1	E = 2	C = 3	F = 4	D = 5	B = 6

On a donc 10 possibilités avec A = 1, au total, d'après la remarque préliminaire : 6 × 10 = 60.

18 $AC \leq AB + BC$

Il existe 7 triangles.

Justification

Désignons par x, y, z les mesures des côtés d'un triangle dont les mesures des côtés sont des entiers et dont le périmètre mesure 15 et tels que : $x \leq y \leq z$.

Dans un premier temps, déterminons tous les triplets (x, y, z) possibles tels que $x + y + z = 15$.

Tranquillou, méthodou

(1, 1, 13)	(2, 2, 11)	(3, 3, 9)	(4, 4, 7)	(5, 5, 5)
(1, 2, 12)	(2, 3, 10)	(3, 4, 8)	(4, 5, 6)	
(1, 3, 11)	(2, 4, 9)	(3, 5, 7)		
(1, 4, 10)	(2, 5, 8)	(3, 6, 6)		
(1, 5, 9)	(2, 6, 7)			
(1, 6, 8)				
(1, 7, 7)				

Pour qu'un triplet (x, y, z) soit les mesures d'un triangle, il faut que z, la mesure du plus grand côté soit strictement inférieure à la somme des deux autres côtés $x + y$.

Ainsi, on obtient les **7 triangles possibles** :

(1, 7, 7)	**(3, 5, 7)**	**(4, 4, 7)**	**(5, 5, 5)**
(2, 6, 7)	**(3, 6, 6)**	**(4, 5, 6)**	

19 Le bourdon

Le bourdon a parcouru 100 km.

Les trains se déplacent tous les deux à la vitesse de 80 km/h et sont distants de 160 km. Ils se croisent donc au bout d'une heure. Le bourdon, infatigable, vole ce temps à la vitesse de 100 km/h, il a donc parcouru 100 km.

À bon entendeur salut !

Quand on posa le problème à John von Neumann (1903-1957) mathématicien et physicien américano-hongrois, il donna la réponse immédiatement. Son interlocuteur lui dit : « Vous avez pris la solution simple, je pensais que vous auriez fait la somme de la série infinie. » « Mais j'ai fait la somme de la série infinie. » répondit von Neumann.

20 Râ

À la même heure que d'habitude !

Le Soleil émet en continu. Et puis, le Soleil ne se lève pas, c'est nous qui nous levons lorsque nous recevons la lumière !

Le dieu Râ est dans la mythologie égyptienne le dieu du soleil.

21 La famille Latour*

Une solution

– Pierre et Thérèse passent tous les deux.
– Thérèse revient seule et laisse le bateau à son père, qui traverse.
– Pierre ramène le bateau puis Pierre et Thérèse repassent tous les deux.
– Pierre revient seul et laisse le bateau à sa mère, qui traverse.
– Thérèse revient seul puis Pierre et Thérèse repassent tous les deux.
– Thérèse fait un aller et retour pour aller chercher Tom le chien, qui jappe d'impatience de retrouver ses maîtres.

22 Pirouette, cacahuète...*

Réponse : **931**

Une démarche

Définition : un nombre entier[1] est divisible par 7 si la division de ce nombre par 7 est un nombre entier.

On cherche tous les nombres à 3 chiffres que l'on peut écrire avec les chiffres 3, 1, 6 en procédant avec ordre et méthode pour n'en oublier aucun :

– les nombres commençant par 1 : 136 et 163

– les nombres commençant par 3 : 316 et 361

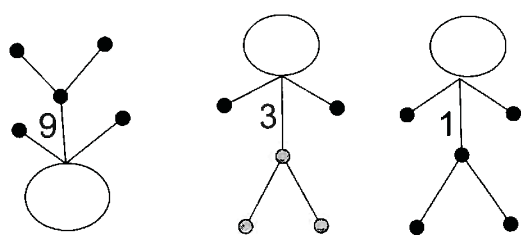
– les nombres commençant par 6 : 613 et 631.

Puis on divise chacun de ces 6 nombres par 7 et l'on constate qu'aucun n'est divisible par 7.

Petit moment de perplexité ! Une pirouette pour s'en sortir ? La personne portant le dossard 6 va se tenir en équilibre la tête en bas, droit sur ses mains et on lira **9** sur son dossard !

On cherche alors tous les nombres de 3 chiffres que l'on peut écrire avec les chiffres 3, 1, 9.

139, 193, 319, 391, 913, 931 et l'on constate que seul 931 est divisible par 7.



1. Les nombres entiers sont les nombres : 0, 1, 2, 3, 4...

23 Berloquin, stratège

Démonstration

REMARQUE

Dans la logique de l'énoncé : perdre une bataille = être vaincu.

■ Point méthode 1

Nous allons utiliser le mode de **raisonnement hypothético-déductif**. Ce type de raisonnement permet de déduire des conclusions à partir d'hypothèses.

Aristote en donne la définition suivante :

« Un discours tel que, certaines choses étant posées, quelque autre chose en résulte nécessairement par cela seul que les premières sont posées. »

Pour cela, nous allons formuler les quatre phrases de l'énoncé avec des phrases « si… alors » qui mettent en évidence un raisonnement hypothético-déductif.

1. *Aucun stratège, s'il est bon tacticien, ne peut perdre une bataille.*

   Si un stratège est bon tacticien, alors il ne peut pas perdre une bataille.

2. *Un stratège audacieux ne manque pas d'avoir la confiance de ses troupes.*

   Si un stratège est audacieux, alors il a la confiance de ses troupes.

3. *Aucun mauvais tacticien n'a la confiance de ses troupes.*

   Si un tacticien n'est pas bon, alors il n'a pas la confiance de ses troupes.

4. *Les femmes ne méprisent que les vaincus.*

   De cette phrase, on peut déduire deux « si… alors » :

   (4-1) Si les femmes méprisent un stratège, alors c'est un stratège qui perd une bataille.

   (4-2) Si un stratège perd une bataille alors il est méprisé par les femmes.

■ Point méthode 2

Exemple : la phrase « si le sol n'est pas mouillé alors il ne pleut pas » est **la contraposée** de la phrase « s'il pleut alors le sol est mouillé » et ces deux phrases sont équivalentes, non ?

En schématisant : (si A alors B) équivaut à (si la négation (ou contraire) de B alors la négation (ou contraire) de A).

Pour la suite, écrivons les contraposées des phrases (3) et (4-1).

La phrase (3) est équivalente à sa contraposée : si un stratège a la confiance de ses troupes, alors ce stratège est bon tacticien.

La phrase (4-1) est équivalente à sa contraposée : si un stratège n'est pas vaincu alors le stratège n'est pas méprisé des femmes.

Enchaînons les si... alors :

(2) **Si un stratège est audacieux** alors c'est un stratège qui a la confiance de ses troupes, **contraposée de (3)** si un stratège a la confiance de ses troupes, alors ce stratège est bon tacticien, **(1)** si un stratège est bon tacticien, alors il ne peut pas perdre une bataille (= n'est pas vaincu), **contraposée de (4-1)** si un stratège n'est pas vaincu **alors le stratège n'est pas méprisé des femmes.**

En résumé

(2) ; contraposée de (3) ; (1) ; contraposée de (4-1).

24 Trois peintres sont dans un salon...

Réponse : $\dfrac{13}{12}$ heure, soit **environ 1 heure.**

Une démonstration

On utilise la brave règle de trois.

En 1 heure, le premier peintre peint la moitié du salon, soit $\dfrac{1}{2}$ S.

En 1 heure, le deuxième peintre peint le tiers du salon, soit $\dfrac{1}{3}$ S.

En 1 heure, le troisième peintre peint le quart du salon, soit $\dfrac{1}{4}$ S.

Sans discuter, ni boire, ni se gausser, les trois peintres, en travaillant ensemble, peindront en 1 heure :

$$\frac{1}{2}S+\frac{1}{3}S+\frac{1}{4}S=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)S.$$

En réduisant au même dénominateur :

$$\left(\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}\right)S=\frac{13}{12}S.$$

En 1 heure, $\frac{13}{12}S$ est peint donc le salon S est peint en $\frac{12}{13}$h.

25 Quatre jetons sont sur la table...

1. $\frac{1}{6}$ **2.** $\frac{1}{3}$ **3.** $\frac{2}{3}$

Pour pouvoir répondre, on fait l'hypothèse **d'équiprobabilité**. Cela signifie qu'en tirant un jeton au hasard, on a la même chance ou probabilité de tirer le 1 ou le 2 ou le 3 ou le 4. Et cette probabilité est égale à $\frac{1}{4}$ ou 25 % de chance.

REMARQUE

Une expérience aléatoire est une action dont tous les résultats possibles sont connus mais lors d'une action réalisée, on ne peut pas anticiper le résultat, c'est le hasard qui le déterminera. Par exemple, jeter un dé parfaitement équilibré à 6 faces numérotées 1-2-3-4-5-6 est une expérience aléatoire, en ce sens que l'on connaît tous les résultats possibles 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6, mais on ne peut pas savoir lors du jet du dé quel numéro va sortir.

Déterminons tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire de l'énoncé : tirer 2 jetons parmi 4 jetons.

Procédons méthodou...

1-2 2-3 3-4

1-3 2-4

1-4

Cette expérience aléatoire a donc 6 résultats possibles, tous équiprobables.

REMARQUE

Pour la question posée par l'énoncé, l'ordre dans lequel on tire les jetons n'a pas d'importance. Cela signifie que tirer le 1 puis le 4 est le même tirage que tire le 4 puis le 1.

Intuitivement, la probabilité d'un événement, dans le cas d'équiprobabilité est égale à :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

1. Le nombre de cas favorables (c'est-à-dire qui répondent à la consigne : la somme des numéros est égale à 4) est égal à 1. (Résultat : 1-3).
Donc la probabilité d'obtenir une somme égale à 4 est : $\frac{1}{6}$.

2. Les résultats : 1-4 et 2-3 sont les cas favorables à l'événement. La somme des numéros est égale à 5.
Donc la probabilité d'obtenir une somme égale à 4 est : $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

3. Les résultats : 1-4, 2-3, 2-4, 3-4 sont les cas favorables à l'événement. La somme des numéros est supérieure ou égale à 5. Donc la probabilité correspondante égale : $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

ÉTYMOLOGIE

HASARD vient de l'arabe AZ-ZAHR qui signifie jet de dé.

ALEA vient du latin qui signifie DÉ, JEU de DÉ, JEU de HASARD.

CHANCE vient du latin CADERE qui signifie CHOIR, TOMBER.

26 Le petit train de Sam Loyd*

Un déroulement du croisement

Notations

Le train L est le train de gauche. lL est la locomotive, elle est suivie par les wagons wL1, wL2, wL3.

Le train R est le train de droite. lR est la locomotive, elle est suivie par les wagons wR1, wR2, wR3, wR4.

Ainsi, on schématise le début :

voie de garage

wL3, wL2, wL1, lL   lR, wR1, wR2, wR3, wR4

- Le train R recule de telle sorte que le train L pourra passer entièrement à droite de la voie de garage, puis la locomotive R se détache de ses 4 wagons et va se mettre dans la voie de garage, puis le train L passe à droite de la voie de garage, on a le schéma suivant :

voie de garage lR

wL3, wL2, wL1, lL wR1, wR2, wR3, wR4

- La locomotive R recule sur la voie, attache les wagons wL3, wL2, wL1 puis se positionne avec ces wagons à gauche de la voie de garage. La locomotive L va dans la voie de garage. On a le schéma suivant :

voie de garage lL

lR, wL3, wL2, wL1 wR1, wR2, wR3, wR4

- La locomotive R et les 3 wagons lR, wL3, wL2, wL1 recule, accroche les wagons wR1, wR2, wR3, wR4, se repositionne avec les 7 wagons à gauche de la voie de garage. La locomotive L sort de la voie de garage puis avance sur la voie. On a le schéma suivant :

voie de garage

lR, wL3, wL2, wL1 wR1, wR2, wR3, wR4 lL

- La locomotive lL recule sur la voie et accroche 5 wagons, avance avec ces 5 wagons entièrement sur la droite de la voie de garage, puis recule sur la voie de garage de sorte à y déposer le wagon wL1. On a le schéma suivant :

voie de garage wL1

lR, wL3, wL2 wR1, wR2, wR3, wR4, lL

- La locomotive lL avec les quatre wagons wR1, wR2, wR3, wR4 recule à gauche sur la voie au-delà de la voie de garage, détache les quatre wagons, avance à droite de la voie de garage, recule sur la voie de garage, y accroche le wagon wL1, lL1 avec wL1 avance sur la voie à droite de la voie de garage puis recule à gauche de la voie de garage et accroche les cinq wagons : wL2, wR1, wR2, wR3, wR4, avance avec les six wagons à droite de la voie de garage. On a le schéma suivant :

voie de garage

lR, wL3 wL2, wR1, wR2, wR3, wR4, wL1, lL

Vous avez compris ? On arrive « au bout du tunnel » ! ! ! ! On refait la même manip. pour accrocher au train IL, wL1 les deux autres wagons wL2, wL3.

Les deux trains vont maintenant respectivement à leur point d'arrivée.

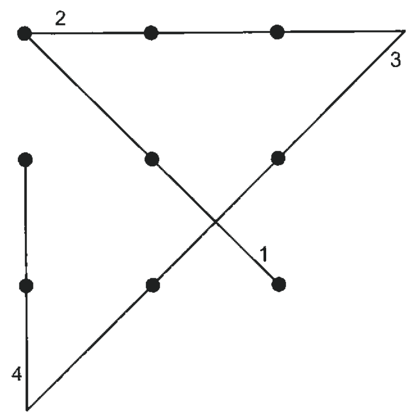
Suggestion : faites toutes les manipulations en vrai avec vos trains Duplo, Lego ou autre !

Information

Tous les ans, le 21 octobre, dans le monde entier, date anniversaire de la naissance de Martin Gardner (1914-2010), mathématicien et magicien de génie, se tiennent des réunions appelées Gathering for Gardner (ou G4G). Depuis 2010, KAFEMATH est le nœud parisien du « Celebration of Mind ».

27 Des p'tits points...

Une façon de faire



Note : les énoncés 27, 38, 49 sont proposés lors d'entretiens d'embauche pour tester la capacité à sortir du cadre, à transgresser !

28 X

***Réponse :* 3 solutions**

On peut procéder par essai-rectification « au petit bonheur la chance ». La détermination de toutes les solutions est demandée, une démarche rigoureuse s'impose.

Déduisons de l'énoncé.

- Désignons par S la somme des 5 nombres de 1 à 5 :

  $$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

  Supposons résolu le problème et désignons par s la somme d'un des segments d'un X solution.

  On peut en déduire un encadrement de s : $1 + 15 \leq 2$ secondes $\leq 5 + 15$.

  $1 + 15$ correspond à 1 dans le rond central, $5 + 15$ correspond à 5 dans le rond central.

  On a donc : $8 \leq s \leq 10$.

- Est-il possible de mettre un nombre pair dans le rond central ? La réponse est non.

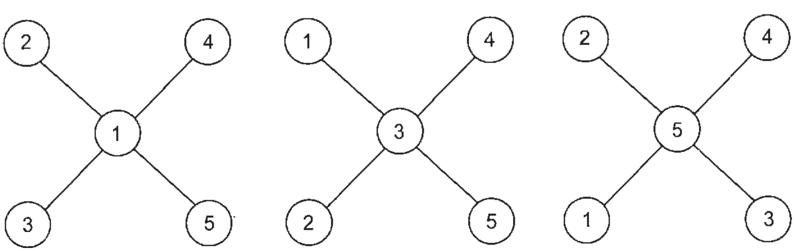
  En effet, il resterait un nombre pair et trois nombres impairs à placer et la somme d'un pair avec un impair est impair et la somme de deux impairs est pair.

  Procédons à la détermination de toutes les solutions :

  – plaçons 1 au centre, un des segments portera 3 et 4, l'autre 2 et 5 ($s = 8$)

  – plaçons 3 au centre, un des segments portera 1 et 5, l'autre 2 et 4 ($s = 9$)

  – plaçons 5 au centre, un des segments portera 1 et 4, l'autre 2 et 3 ($s = 10$).



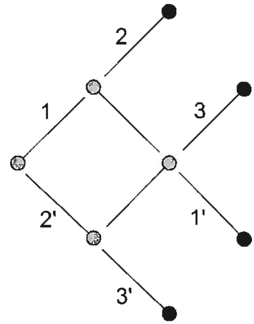
29 Retournement

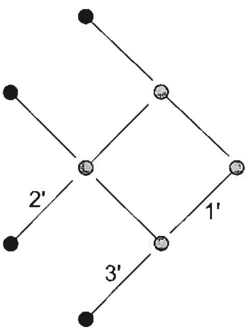
Une solution

Jouons avec des allumettes !

Point méthode

Dessinons avec 8 allumettes le problème résolu, c'est-à-dire le poisson se déplaçant de la gauche vers la droite puis observons.





Les allumettes 1, 2, 3 viennent prendre les positions 1', 2', 3' et l'on obtient un poisson allant de la droite vers la gauche.

30 Une poule sur un mur...

***Réponse :* 48 œufs**

4 × 3 poules pondent 4 × 3 œufs en 3 jours.

12 poules pondent 12 × 4 œufs en 3 × 4 jours.

Proverbe français

« Coucher de poule et lever de corbeau écartent l'homme du tombeau. »

31 Suites de calculs

Les écritures ne sont pas uniques, je vous en propose une par énoncé, vous pouvez m'envoyer les vôtres.

31 à l'aide de 5 chiffres 3 : $31 = 33 - \dfrac{3+3}{3}$.

34 à l'aide de 4 chiffres 3 : $34 = 33 + \dfrac{3}{3}$.

20 à l'aide de 4 chiffres 9 : $20 = \dfrac{99}{9} + 9$.

100 à l'aide de 4 chiffres 9 : $100 = \dfrac{99}{9} + 1$.

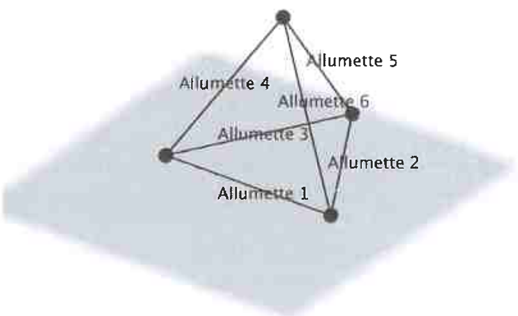
100 en utilisant une fois et une seule chacun des neuf chiffres :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 : $100 = 75 + 8 + 9 + 6 + 2 + 4 - (1+3)$

$100 = 74 + 25 + \dfrac{3}{6} + \dfrac{9}{18}$.

32 Jouons encore avec le feu

Les extrémités des 6 allumettes sont les sommets du **tétraèdre régulier** d'arête égale à la longueur d'une allumette.



REMARQUE

3 points désignent un plan (en grisé sur le schéma). Si l'on continue, plan, plan, on s'aperçoit que le problème est impossible à résoudre. C'est là, encore une fois, qu'il faut sortir du cadre. Sortir de la dimension 2 (= géométrie plane) pour envisager la dimension 3 (= géométrie dans l'espace) et la lumière se fait sur le tétraèdre régulier !

33 Irancy

Une manipulation

Contenances respectives du fût et des 3 récipients :

24 litres	3 litres	11 litres	5 litres
24	0	0	0
0	8	11	5
16	8	0	0
16	0	8	0
3	13	8	0
3	8	8	5
8	8	8	0

34 Ouvrir une école, ferme une prison

Menues réflexions préalables

- Désignons par L la porte de la liberté et $\overline{L}$ la porte vers l'esclavage, par M le gardien qui ment et par $\overline{M}$ le gardien qui dit la vérité.
  Il y a deux configurations possibles schématisées par :

  1. (L,M) et $(\overline{L},\overline{M})$ **2.** $(L,\overline{M})$ et $(\overline{L},M)$

- Je ne peux poser qu'une question à un seul gardien, mais il y a deux gardiens. Intuitivement je sens bien que ma question doit les interpeller tous les deux.
  La réponse est OUI ou NON, là encore, il ne faut peut-être pas chercher midi à quatorze heures, OUI doit être associé à l'une des portes, NON à l'autre porte, n'est-ce pas ?
  Reprenons la réponse donnée au début et examinons tous les cas possibles.

- Si le gardien interrogé est dans la configuration (L,M), en d'autres termes, c'est le gardien qui ment et qui est devant la porte vers la liberté, sa réponse sera OUI.

  (En effet : l'autre gardien le « $(\bar{L},\bar{M})$ » dirait non, or le « (L,M) » dit le contraire de la vérité donc oui.)

- Si le gardien interrogé est dans la configuration $(\bar{L},\bar{M})$, en d'autres termes, c'est le gardien qui ne ment pas et qui n'est pas devant la porte vers la liberté, sa réponse sera NON.

  (En effet : l'autre gardien le « (L,M) » dirait non car il ment, or le « $(\bar{L},\bar{M})$ » dit la réalité donc non.)

- Si le gardien interrogé est dans la configuration $(\bar{L},M)$, en d'autres termes, c'est le gardien qui ment et qui n'est pas devant la porte vers la liberté, sa réponse sera NON.

  (En effet : l'autre gardien le « $(L,\bar{M})$ » dirait oui, or le « $(\bar{L},M)$ » dit le contraire de la vérité donc non.)

- Si le gardien interrogé est dans la configuration $(L,\bar{M})$, en d'autres termes, c'est le gardien qui ne ment pas et qui est devant la porte vers la liberté, sa réponse sera OUI.

  (En effet : l'autre gardien le « $(\bar{L},M)$ » dirait oui, or le « $(L,\bar{M})$ » dit la vérité donc oui.)

On a examiné tous les cas.

Quand le gardien interrogé est devant la porte de la liberté, il dit OUI, s'il est devant la porte de l'esclavage, il dit NON.

Donc si le prisonnier obtient la réponse OUI, il va vers la porte du gardien interrogé, s'il obtient la réponse NON, il va vers la porte gardée par l'autre gardien.

35 George Perec

L'utilisation d'un tableau est bien facilitant !

Messieurs	Boulanger	Pasteur	Scribe
Professions	Scribe (2)	Boulanger (2')	Pasteur (2')
Adresses	Boulevard Pasteur (1)	Rue Scribe (4)	Rue des Boulangers (3)

Comment est-ce raisonné ?

Dans l'ordre :

(1) : M. Boulanger habite boulevard Pasteur.

(2) : le pasteur habite rue des Boulangers et M. Boulanger habite boulevard Pasteur donc M. Boulanger n'est pas pasteur. Il est donc scribe.

(2') : tous ont une profession différentes de leur nom, donc M. Pasteur est boulanger et M. Scribe est pasteur.

(3) : le pasteur habite rue des Boulangers.

(4) : donc M. Pasteur habite rue Scribe.

36 La cour du sultan

Explication de l'affirmation

40 maris trompés, 40e matin.

Raisonnons s'il n'y avait qu'un mari trompé. Il chasserait sa femme le premier matin. En effet, sachant qu'il y a au moins une femme infidèle et n'en connaissant aucune, il en déduirait que c'est la sienne et la chasserait donc de la ville.

S'il y avait deux maris trompés, chacun des deux saurait que l'autre est trompé et s'attendrait donc à le voir chasser sa femme le premier matin. Comme cela ne se produit pas, chacun en déduit que l'autre faisait le même raisonnement. Ainsi le deuxième matin, les deux maris chassent leurs femmes infidèles.

S'il y avait trois maris trompés, chacun des trois saurait que les deux autres sont trompés et s'attendrait à les voir chasser leurs femmes le deuxième matin. Comme cela ne se produit pas, chacun en déduit qu'il y a une troisième femme infidèle, qui ne peut être que la sienne. Les trois maris chassent donc leurs femmes le troisième matin.

Ainsi de suite, les quarante maris chassent leurs femmes le quarantième matin.

37 Multiplications

Réponse : **153 846**

Comprenons le texte

Désignons par x le nombre cherché. On peut l'écrire dans le système décimal : $x = \overline{ab......\lambda 6}$, a, b,..., sont ses premiers chiffres, 6 étant le dernier.

On peut traduire le texte par : $4 \times x = \overline{6ab.....\lambda}$.

Ainsi le premier chiffre du nombre x est le deuxième chiffre du nombre, le deuxième chiffre de x est le troisième chiffre de $4 \times x$, etc.

Posons la multiplication du nombre cherché x par 4 qui donne le nombre $\times$:

$$\begin{array}{r} ....6 \\ \times \quad 4 \\ \hline 6......... \end{array}$$

Commençons la multiplication :

$$\begin{array}{r} ....6 \\ \times \quad 4 \\ \hline ....4 \end{array}$$

D'après l'analyse du début, 4 est donc l'avant-dernier chiffre de x.

Poursuivons la multiplication :

$$\begin{array}{r} \ldots\ldots\ldots 46 \\ \times \quad 4 \\ \hline \ldots\ldots\ldots 84 \end{array}$$

Toujours d'après l'analyse du début, 8 précède le 4 dans l'écriture en chiffres de *x*.

On a compris, on continue le processus :

$$\begin{array}{r} \ldots\ldots\ldots 846 \\ \times \quad 4 \\ \hline \ldots\ldots\ldots 384 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \ldots\ldots\ldots 3846 \\ \times \quad 4 \\ \hline \ldots\ldots\ldots 5384 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \ldots\ldots\ldots 53846 \\ \times \quad 4 \\ \hline \ldots\ldots\ldots 15384 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \ldots\ldots\ldots 153846 \\ \times \quad 4 \\ \hline \ldots\ldots 6\,15384 \end{array}$$

REMARQUE

On peut continuer le processus et l'on trouve toutes les solutions, ce sont les nombres dont la suite décimale périodique répète un certain nombre de fois la séquence : 153 846 : 153 846 153 846 153 846...

Voilà on peut s'arrêter. Le plus petit nombre entier répondant à la recherche est donc 153 846.

38 Encore des petits points...

Une réponse