. Généralités sur la mesure.

Calculs d'erreurs = estimation de l'erreur commise.

Mesure : un science . Différentes méthodes sont utilisé.
Débouchés : - base des la détermination des lois fondamentale
- permet de gérer des chaînes de fabrication (méthode statistique, informatique)

I. Grandeurs Physiques

1. Définitions.

1.1 . Grandeurs Physiques.

c'est la caractéristique d'une qualité ou d'une propriété d'un corps ou d'un phénomène susceptible d'avoir différentes intensités qui peuvent être ordonnées.

1.2 Mesure d'une grandeur physique.

C'est lui attribuer un nombre qui fixe de façon indiscutable et exacte son intensité ou état par rapport à n'importe quelle autre grandeur de même espèce. Pour n'importe quel observateur opérant en n'importe quel lieu et à n'importe quelle époque.

L'environnement intervient dans la mesure. Il doit donc être précisé.

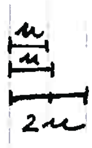
2. Différents types de grandeurs

2.1 Grandeurs directement mesurables.

Grandeurs pour lesquelles on peut définir l'égalité et la somme de 2 grandeurs de m espèce.

ex. Longueur.

unité



$$G = n \cdot g$$

nombre (n), grandeur (G), unité (g)

La valeur du nombre obtenue dépend de l'unité choisie.

$$G = n.g = n'g' \longrightarrow \frac{n}{n'} = \frac{g'}{g}$$

Le rapport des nombres est égale à l'inverse du rapport des unités.

Le nombre n a une signification physique précise.
Dire que $n = 0$ revient à dire que la grandeur n'existe pas.

Le nombre n jouit de propriété d'additivité

$G_1 = n_1 g$

$G_2 = n_2 g$

$$G_1 + G_2 = (n_1 + n_2).g$$

2.2 Grandeurs indirectement mesurables.

On sait définir l'égalité mais on ne sait pas définir la somme.

ex : La densité, résistivité (le seul moyen de mesure ρ c'est de faire $\rho = \frac{RS}{\ell}$ } 3 grandeurs directement mesurables.

$$G = f(x, y, z \ldots)$$

G : indirectement mesurable. — $x, y, z\ldots$: grand. directement mesurable.

unité de ρ : $\Omega.m$.

certaines grandeurs indirectement mesurable sont indépendant des unités.

- indice de réfraction : $n = \dfrac{c}{v}$ (1,5 pour le verre)
- nombre de Mach $= \dfrac{v \text{ de l'avion}}{v \text{ son air}}$

n est une grandeur sans dimension.

2.3 Grandeurs repérables.

Grandeurs pour lesquelles on sait définir l'égalité et le sens de l'inégalité mais non la somme ni trouver une relation analytique entre cette grandeur et des grandeurs directement mesurable.

ex : température Celsius. (mesure avec un repère.)

100°C	ébullition de l'eau	212° F
0°C	solidification de l'eau.	32° F

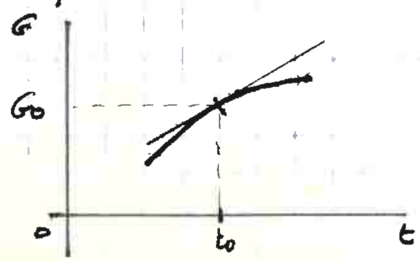
$$\frac{9}{5}(t°C - 0°C) = (t°_F - 32)$$

$$\boxed{t°_F = 32 + \frac{9}{5}\, t°C.}$$

3. Grandeurs constantes et Grandeurs variables.

Constantes dans des conditions expérimentales données.
résultat : la valeur trouvée, l'erreur, les conditions expérimentales.

Grandeurs variables avec le temps.
Il faut faire une série de mesure en fonction du temps et faire la courbe.



A l'instant to
Donner Go et la tangente à la courbe soit $\left(\frac{dG}{dt}\right)_{t=t_0}$.

Grandeurs Aléatoires : leurs valeurs oscillent de manière désordonnée autour d'une certaine valeur moyenne. (ex : décomposition du Radium)

on peut les caractérisé par une valeur moyenne et l'écart type.
De tels grandeurs aléatoires s'étudient au moyen de lois statistiques.

II Les Systèmes d'unités.

Les grandeurs directement mesurables et indirectement mesurables nécessitent une unités. L'ensemble des unités est regroupés dans un système d'unités. Elles ne sont pas indépendantes les unes des autres.

1 Unités de base et unités dérivées

1.1 Définition

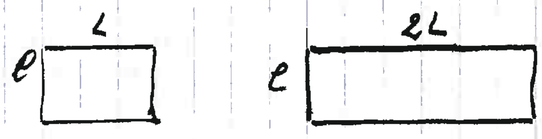
Unités de base (unités fondamentales) sont arbitrairement choisies en pt nombre sans aucune relation entres-elles et qui servent de point de départ pour les autres unités nécessaires.

Dans le S.I il y a 7 unités de base.

Les unités dérivées se déduisent des unités de base par des relations de définition (ex: surface : produit de de deux longueurs.)

1.2 Relation ~~de~~ entre les unités de base et les unités dérivés.

Soit l'unité de longueur choisie.
Pour passer à l'unité de surface, on prend deux rectangle



La surface d'un rectangle est proportionnelle au produit de la longueur par la largeur.
$S = k . l . L$

on décide $k = 1 \rightarrow S_{\square} = l . L$

$S_{\square} = a^2$

L'unité de surface c'est la surface d'un carré de un mètre de côté.

$S_{\circ} = \pi R^2$ $S_{\text{ellipse}} = \pi . a . b$

(π : coef. de proportionnalité)

Un ensemble d'unités forment un système cohérent lorsque dans toutes les relations qui permettent de déduire les unités dérivés à partir des unités fondamentales, les coefficients de proportionnalités sont égaux à l'unités.

Le SI est un système cohérent.

2. Les Equations de dimensions

2.1 Définition

vitesse d'un mouvement uniforme

$v = \frac{e}{t}$ $[L] = 1\,m$ $[T] = 1\,s$ $[L].[T]^{-1}$

$[V] = m . s^{-1}$ ...

La relation entre les grandeurs mesurées a la même forme que la relation des unités !

Autre système d'unité $[L']$ $[T']$ $[V']$ $\quad [V'] = [L'][T']^{-1}$

$$\frac{v'}{v} \text{ (rapport des grandeurs)} = \frac{[V]}{[V']} = \frac{[L].[T]^{-1}}{[L'].[T']^{-1}}$$

$$\boxed{V = L \,.\, T^{-1}}$$ Equation de dimension.

Rq. ; pag. 14 : MLT^{-2} ; ML^2T^{-2}

2.2 Applications

Pour vérifier l'homogénéité des formules.
L'égalité doit être conservée dans un changement d'unité dans les deux membres.
Les deux membres d'une même formule doit avoir les mêmes dimensions
Si ce n'est pas le cas → la formule est fausse.

ex : période d'un pendule simple

$$\Theta = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

1er membre : temps T
2e membre : $L^{\frac{1}{2}}.(\text{accélération})^{-\frac{1}{2}}$

$\left(2\pi \ell^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}\right)$ — dimension d'une accélération $L.T^{-2}$

$$\rightarrow L^{1/2}(LT^{-2})^{-\frac{1}{2}} = L^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{+1} = T$$

III Le système international d'unité

IV Les Erreurs de mesures

Si on mesure une grandeur x inconnue. cte. Condition expérimentales bien définies plusieurs fois on trouve des résultats différents :
$x_1, x_2 \dots x_k \dots x_n$
chaque mesure possède une erreur
- erreurs systématiques (1)
- erreurs fortuites ou accidentelles (2)
- erreurs parasites (3)

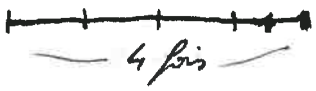
(2) sont toujours présentent
(1)(3) doivent être éliminés autant que possible.

1. Erreurs Systématiques

1.1 Définition Elles proviennent de causes constantes, et qui entraînent des erreurs systématiques constantes. lorsque les conditions expérimentales sont invariables.

- dûes à des imperfections des appareils ou à des méthodes de mesure.

ex : soit une longueur à mesurer valeur exacte 80,4 cm utilisation d'un double décimètre : vraie longueur 20,1 cm



Résultat : 80 cm.

Solution : contrôle du double décimètre

1.2 Causes d'erreurs systématiques

a- Défauts des appareils de mesure, aiguille n'est pas au zéro, hystérésis des galvas.

b- Défauts de montage des appareils de mesure
mesure de résistance très élevées, erreurs systématiques due à la résistance d'isolement.
mesure de temps très faible :(couple thermoélectriques)

c- Imperfection des méthodes de mesure.
optique : photométrie
utilisation d'une mauvaise formule.

d- Mauvaise définition des conditions expérimentale.
ex : utilisation d'un appareil à une t° très différentes de celle recommandée par le constructeur, dans une position différente dans celle de laquelle il a été utilisé
Appareil auquel on adjoint un accessoir non prévu par le constructeur

1.3 Contrôle des erreurs systématiques.

- Contrôle des appareils de mesure
- Réfléchir aux méthodes de mesure employé et aux conditions expérimentales. (choix des appareils)

Dans les deux cas, il faut être compétent.

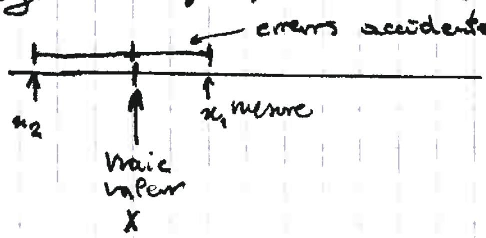
" (Etalonage fréquent) → courbe de correction
(essais à blanc : Mesure dont on connait par avance le résultat.)

2. Erreurs parasites.

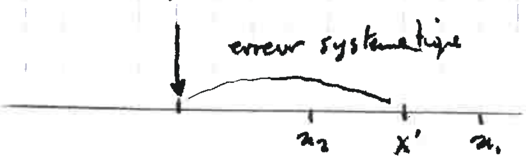
Commises par l'opérateur : maladresse, négligeance, oubli, incompétence ou mauvaise foi

3. Erreurs fortuites ou accidentelles.

Erreurs qui obéissent aux lois du hasards. Elles ont un très grand nombre de causes ayant chacune une incidence faible et pouvant agir indistinctement dans un sens ou dans l'autre

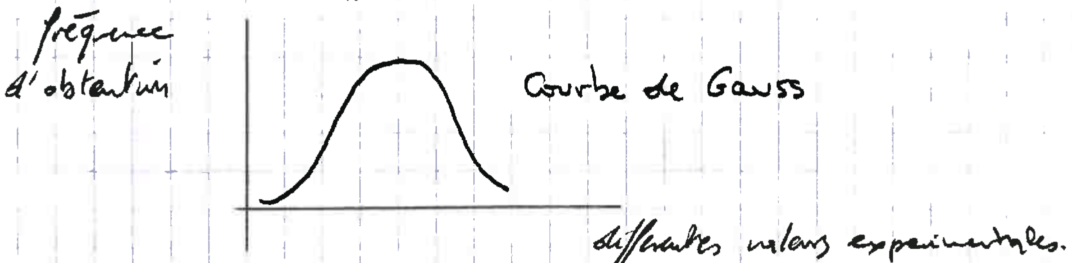


vraie valeur au voisinage de la mesure



mesure au voisinage de la valeur fausse

La théorie des erreurs accidentelles fait appel aux statistiques et aux probabilités (cours Maths 2e année).
Si on fait un très grand nombre de mesures. La répartition du nombre de ces mesures des différentes valeurs trouvées.



TD
4 octobre 83

Introduction aux calculs d'incertitudes

On veut faire des mesures en tenant compte de l'imprécision des appareils et des erreurs de mesures, les plus exactes possible.

[$n = 1,6234897$ ne veut rien dire du tout]

Ex : on mesure la valeur d'une résistance et on trouve $R = 250\,\Omega$ à 1% près.
on branche à ses bornes une source de tension $U = (500 \pm 0,5)$ V
Quel est la valeur de I, l'incertitude de I ?

1re idée $+$ $I = \frac{U}{R}$ U et R varie entre 2 bornes. (4 calculs).
cette méthode n'est pas bonne
(Pour une formule comme $n = \dfrac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin \frac{A}{2}}$

cette méthode est très compliquée.)

- Méthode fastidieuse.

But : Mettre au point une méthode systématique pour résoudre tous les problèmes qui se posent

Définition de la dérivée : $F = \sin(Ax + b)$ fonction d'une fonction
$F' = A\cos(Ax+b)$.

I - Notion de différentielle (fonction à une variable).

1 - Rappel. dérivée.

Toutes les fonctions physiques sont parfaitement continues et dérivables.

Définition : c'est la limite d'un rapport $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ $h \to 0$

$\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$
$\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$	$\dfrac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$
$\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$	$\dfrac{4}{\sin^2 2x}$
$\dfrac{x^2}{\log x}$	$\dfrac{x(2\log x - 1)}{(\log x)^2}$

$\log(1-x^2)$	$-\dfrac{2x}{1-x^2}$
$(\log x)^2 - \log(\log x)$	$\dfrac{2}{x}\log x - \dfrac{1}{x\log x}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$ $\frac{\pi}{3}$ c'est l'Arc dont le sinus est $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{3} = \operatorname{Arcsin}\frac{\pi}{3}$

$y = \sin x$ $\quad\quad$ $x = \operatorname{Arcsin} y$

$$\boxed{(\operatorname{Arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

les dérivées de deux fonctions réciproques sont inverse.

2- Différentielle

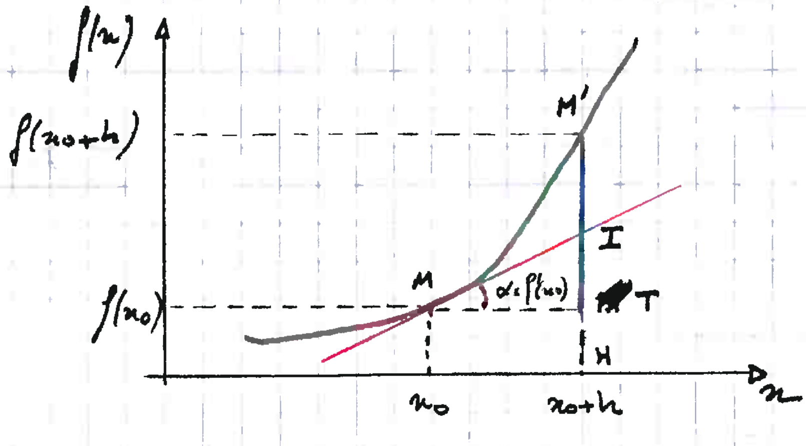
Définition : la différentielle de la fonction f au point x_0 notée df est la quantité $f'(x) \times h$ (h étant quelconque)

df est une fonction de deux variables (x_0, h)

Si $f(x) = x \Rightarrow dx = h$

$$\boxed{df = f'(x_0) \cdot dx} \iff f'(x_0) = \frac{df}{dx}$$

3- Accroissement, différentielle, dérivée



* Accroissement par définition

$$\delta f = f(x_0+h) - f(x_0).$$

* Différentielle par définition

$$df = f'(x_0) \times h$$

$$\delta f = \overline{M'T}$$

$f'(x_0)$ est le coéf directeur de la tangente à la courbe au point M

$$df = \overline{IT}$$

Lorsque $h \to 0$ $\quad df \to \delta f$ $\quad$ c'est à dire que le rapport tend vers 1

$$\frac{\delta f}{df} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{f'(x_0)\cdot h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot \frac{1}{f'(x_0)}$$

Lorsque $h \to 0$ $\frac{f(x_0+h)}{h} \to f'(x_0)$.

$$\boxed{\Rightarrow \frac{df}{df} \underset{h \to 0}{\to} 1.}$$

Lorsque h "petit" : $\delta f \simeq df$

$$f(x_0+h) \simeq f(x_0) + \underbrace{df}_{f'(x_0)\times h}.$$

4 Application

a. Exercice II 1

Soit $y = x^2$ $\qquad x = x_0 = 100$

$dy = f'(x_0) \times h = 2x_0 . h$

$\delta f = f(x_0+h) - f(x_0)$.

h	δy cm^2	dy cm^2
10	2100	2000
1	201	200
0,1	20,01	20
0,01	2,0001	2

on vérifie $h \to 0$ $\delta y \to dy$

h "petit" dépend de la précision de calcul que l'on veut obtenir.

b. Formules d'approximation

$$\boxed{f(x_0+h) \simeq f(x_0) + f'(x_0) \times h}$$

* Soit à calculer $(1+\varepsilon)^n$ $\quad \varepsilon$ petit

$f(x) = x^n \quad x_0 = 1 \quad h = \varepsilon \qquad f'(x) = n . x^{n-1}$

$(1+\varepsilon)^n \simeq 1^n + n . 1^{n-1} \times \varepsilon$

$\underline{(1+\varepsilon)^n \simeq 1 + n\varepsilon}$

ex : $101^2 = (100+1)^2 = 100^2\left(1+\frac{1}{100}\right)^2 = 100^2\left(1+\frac{2}{100}\right)$

$= 100^2 \times 1,02 = \underline{10200}.$

* Soit à calculer $\sin \alpha$ (α petit).

$f(x) = \sin x \quad x_0 = 0 \quad \alpha = h \quad f'(x) = \cos x.$

$\sin(0+\alpha) \simeq \sin(0) + \cos 0 \times \alpha.$

$\boxed{\sin \alpha \simeq \alpha}$ α en radians.

A faire : Trouver $\begin{cases} \log(1+\varepsilon)\,? & \varepsilon \text{ petit.} \\ \cos \alpha & \alpha \;\text{"} \end{cases}$

C. Ex n° II 4.

$\sin 1°30' \rightarrow \sin \frac{1{,}5\pi}{180} = \frac{1{,}5\pi}{180} = 0{,}02618$

Valeur exact : 0,02617

$\sin 31° \rightarrow \sin(30° + 1°) =$

$f(x_0+h) \simeq f(x_0) + h f'(x_0)$

$f(x) = \sin x \quad x_0 = \frac{\pi}{6} \quad f'(x) \cos x \quad h = 1° = \frac{\pi}{6}$

$\sin 31° \simeq \sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{180} \cdot \cos\frac{\pi}{6}$

$\simeq 0{,}5 + \frac{\pi}{180} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}5151$ Valeur exact. 0,515038.

ex n° II 2.

Cercle. $S = \pi x^2 \quad dS = 2\pi x . dx.$

Sphère $S = 4\pi x^2 \quad dx - 8\pi x$

V. sph. $V = \frac{4}{3}\pi x^3 \quad dV = 4\pi x^2 . dx.$

ex. n° II 3

$I = \frac{U}{R}.$

$dI = U . d\left(\frac{1}{R}\right) \cancel{dR} = U . -\frac{1}{R^2} dR$

$dI = -0{,}5 \text{ mA}$

II Fonction de deux ou plusieurs variables.

ex : $Z = \frac{U}{R} \quad C = \sqrt{a^2+b^2} \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

Differentielle.

Soit $f(x, y)$ $\quad V = \pi R^2 \times h \quad \frac{dV}{dh} = \pi R^2$

$\frac{dV}{dR} = 2\pi R h$ dérivée partielle

Dérivée partielle de f par rapport à x : $\frac{\partial f}{\partial x}$.

" " " " " " " y : $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy}$$

ex: $V = \pi R^2 h$

$$\frac{\partial V}{\partial H} = \pi R^2 \qquad \frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi h$$

$$dV = \pi R^2 dh + 2\pi h \, dR$$

ex: $f(x,y) = \frac{x}{y}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

$$df = \frac{1}{y} \cdot dx - \frac{x}{y^2} \cdot dy = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} S = u + v & dS = du + dv \\ P = u \cdot v & dP = v\,du + u\,dv \\ Q = \frac{u}{v} & dQ = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \end{array}}$$

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad df = ?$

$$\frac{\partial f}{x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$df = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot dx + \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot dy = \frac{x \cdot dx + y \cdot dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$df = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

deuxième méthode $\quad df = d(\sqrt{u}) \cdot du$

$u = x^2 + y^2 \Rightarrow du = 2x \cdot dx + 2y \cdot dy$.

2. Relation entre df et δf.

$f(x,y)$

Accroissement $\delta f = f(x_0+a, y_0+b) - f(x_0,y_0)$

si a, b sont petit

$$\delta f \simeq df.$$

3. Généralités.

Dans le cas de plus de deux variables on admet que ce résultat reste valable.

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x_1, x_2, \dots x_n) \\ \delta f = f(x_1+h_1, x_2+h_2, x_n+h_n \dots) - f(x_1, x_2, x_n) \\ df = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n \\ \delta f \simeq df. \end{array}}$$

4- Exemple.

Ex : I_1.

$z = x^2 y$ $\quad dz = ?$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2yx$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2$

$$dz = 2yx . dx + x^2 . dy.$$

$z = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad dz = \dfrac{x . y}{\sqrt{x^2+y^2}} . dx . dy.$

$z = \mathrm{Log}\left(1+\dfrac{x}{y}\right)$ $\quad dz\ ?$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{1}{1+\frac{x}{y}} = \dfrac{1}{y+x}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2} \cdot \dfrac{1}{1+\frac{x}{y}} = -\dfrac{x}{y^2+xy}$

$$dz = \frac{1}{y+x} . dx - \frac{x}{y^2+xy} . dy .$$

II₁ $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$

- serie.

$Re = R_1 + R_2$ $\qquad dRe = dR_1 + dR_2$.

$dRe = 0{,}6\,\Omega$

- parallèle

$u = R_1 . R_2$ $\qquad Re = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

$v = R_1 + R_2$

$du = R_1 dR_2 + R_2 dR_1$

$dv = dR_1 + dR_2$.

$$dRe = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

$$= \frac{dR_1 (R_2)^2 + dR_2 (R_1)^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

- $R_1 = 0{,}2\,\Omega$ on veut $dRe = 0$

en serie. $dR_2 = -0{,}2\,\Omega$

en parallèle $R_1^2 . dR_2 + R_2^2 dR_1 = 0$.

$dR_2 = -\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2 . dR_1. = \cancel{-0{,}1}\,\Omega \quad -0{,}05\,\Omega$

III 3. $\sin i = n . \sin R$ $\qquad x = \mathrm{Arc}\sin y$

$i = \mathrm{ARsin}(n . \sin R)$ $\qquad dx = \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$

$$\frac{di}{dn} = \frac{1}{\sqrt{1-(n.\sin R)^2}} . \sin r$$

$u = n \sin R$

$$\frac{di}{dR} = \frac{1}{\sqrt{1-(n.\sin R)^2}} . n \cos R$$

$$\frac{di}{dn} = \frac{di}{du} \times \frac{du}{dn} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} . \sin r$$

$$\frac{di}{dR} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \times n . \cos R.$$

$$di = \frac{\sin r}{\cos i} . dn + n \frac{\cos r}{\cos i} . dr.$$

2e méthode. $\sin i = n \sin r$ $\qquad u = v$

$d \sin i = d\, n . \sin r$ $\qquad du = dv$

$\cos i . di = \sin r . dn + n \cos r\, dr$.

4- $f(H,R) \simeq \pi . R^2 . H.$

$\frac{\delta f}{\delta R} = 2\pi HR.$ $\frac{\delta f}{\delta H} = \pi R^2$

$df = 2\pi HR . dR + \pi R^2 . dH$

$df = -94{,}2477 \text{ cm}^3$

III Application au calcul d'erreur

1- Position du problème

* La mesure de deux grandeurs x et y doit permettre de calculer une grandeur g non mesurable directement $g(x, y)$

ex : mesure de U et I $\rightarrow R = \frac{U}{I}$

* Les valeurs exacte x_0 et y_0 sont inconnue mais on a su déterminer un intervalle contenant x_0 et y_0

$x_1 \leq x_0 \leq x_2$

$y_1 \leq y_0 \leq y_2$

$$\begin{cases} x = x' \pm \Delta x. \\ y = y' \pm \Delta y. \end{cases}$$ avec $\Delta x = \frac{x_2 - x_1}{2}$ $x' = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$\Delta y = \frac{y_2 - y_2}{2}$ $y' = \frac{y_1 + y_2}{2}$

* si on convient de calcul g ~~par~~ (x', y') Quel est l'erreur maximale commise par rapport à la valeur exacte $g(x_0, y_0)$

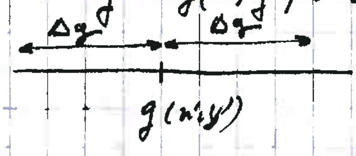
2- Solution du problème

Il faut évaluer le maximum de $|g(x_0, y_0) - g(x', y')|$

$$\delta g = g(x_0, y_0) - g(x', y') \simeq \frac{\partial g}{\partial x}(x_0 - x') + \frac{\partial g}{\partial y}(y_0 - y')$$

Le maximum de $|\delta g| = \Delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| . \Delta x + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| . \Delta y$

Résultat final : $g = g(x', y') \pm \Delta g$



3- Méthode pratique de calcul.

a- on calcule la différentielle de la grandeur g par rapport aux grandeurs mesurées indépendantes

b- on majore l'expression obtenue en prenant les valeurs absolues des dérivées partielles et en replaçant les "d" par de "Δ"

4- incertitude relative

Δg incertitude absolue

$\frac{\Delta g}{g}$: incertitude relative — précision de la mesure en %.

on peut souvent la relier à $\frac{\Delta x}{x}$ et $\frac{\Delta y}{y}$ (voir calcul de la dérivée logarithmique)

II Application

Ex 2. $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ on mesure $\ell = 1{,}000 \pm 0{,}001\,m$

$T = 2{,}00 \pm 0{,}01\,s$.

Calcul : $\ell/g = \frac{T^2}{4\pi^2} \Rightarrow g = \frac{\ell}{T^2}\cdot 4\pi^2$

$g = \frac{1}{2^2}\cdot 4\pi^2 = \pi^2 = $ ~~[illegible]~~ $= 9{,}8696\,ms^{-2}$

. Erreur absolue. dg.

$\frac{\partial g}{\partial \ell} = \frac{4\pi^2}{T^2}$ $\qquad \frac{\partial g}{\partial T} = -\frac{8\ell\pi^2}{T^3}$

$dg = \frac{4\pi^2}{2^2}\cdot d\ell - \frac{8\ell\pi^2}{2^3}\cdot dT = 9{,}869\cdot d\ell - 2{,}4674\cdot dT$.

. calcul de Δg.

$\Delta g = \frac{4\pi^2}{T^2}\cdot \Delta\ell + \frac{8\pi^2\ell}{T^3}\,\Delta T$

$\Delta g = \frac{4\times 10}{4}\cdot 0{,}001 + \frac{8\times 10\times 1}{8}\cdot 0{,}01 = 0{,}11\ ms^{-2}$

Ecriture finale : $\frac{\Delta g}{g} = \frac{0{,}11}{10} = 1\%$.

$9{,}8696 \rightarrow 9{,}87 \qquad \frac{4\cdot 10^{-4}}{10} = 4\cdot 10^{-5}$

$\hookrightarrow 9{,}9 \qquad \frac{0{,}03}{10} = 3\,10^{-3}$

$\hookrightarrow 10 \qquad \frac{0{,}1}{10} = 1\%$.

$$g = (9{,}9 \pm 0{,}1)\,ms^{-2}$$

Rq : $\frac{\Delta g}{g} = \frac{4\pi^2}{T^2}\Delta\ell + \frac{8\pi^2\ell}{T^3}\cdot\Delta T \Big/ g.$ $\qquad \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta\ell}{\ell} + \frac{2\Delta T}{T}.$ Simple !

$f = x^n \times y^m \qquad \log f = n\log x + m\log y.$

$\frac{df}{f} = n\frac{dx}{x} + m\frac{dy}{y}. \qquad \frac{\Delta f}{f} = n\frac{\Delta x}{x} + m\frac{\Delta x}{x}.$

$\log g = \log 4\pi^2 + \log\ell - 2\log T$

$\frac{dg}{g} = \frac{d\ell}{\ell} - \frac{2\,dT}{T} \Rightarrow \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta\ell}{\ell} + \frac{2\Delta T}{T}$

Méthode si on a un produit ou un quotient.

C_3 - $f' = \dfrac{D^2 - m^2}{4D}$ avec $m = \ell_2 - \ell_1$. $(D,\ \ell_1$ et $\ell_2)$

1e méthode.

$$\frac{\delta f'}{D} = \frac{8D^2 - (D^2-m^2)\cdot 4}{(4D)^2} = \frac{2D^2 - (D^2-m^2)}{2D^2} = \frac{D^2-m^2}{4D^2}$$

$$\frac{\delta f'}{\ell_1} = \left(\frac{D^2-(\ell_2-\ell_1)}{4D}\right)' = -\frac{2}{4D} = +\frac{1}{2D}$$

$$\frac{\delta f'}{\ell_2} = -\frac{1}{2D}.$$

$$df' = \frac{D^2-m^2}{4D^2}\cdot dD + \frac{1}{2D}\cdot d\ell_1 - \frac{1}{2D}\cdot d\ell_2$$

$$\boxed{\Delta f' = \frac{D^2-m^2}{4D^2}\cdot \Delta D + \frac{1}{2D}\cdot\Delta\ell_1 + \frac{1}{2D}\,\Delta\ell_2}$$

2e méthode. Calculer la diff. de $f' = \dfrac{D^2-m^2}{4D}$.

$f' = \dfrac{u}{v}$ $\quad u = D^2 - m^2 \quad v = 4D$. $\quad du = 2D\cdot dD + 2m\,dm \quad dv = 4\,dD$.

$$df' = d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} = \frac{du}{v} - u\frac{dv}{v^2} = \frac{2D\,dD + 2m\,dm}{4D} - \frac{(D^2-m^2)\,4\,dD}{16D^2}$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{D^2-m^2}{4D^2}\right)\cdot dD - \frac{m}{2D}\,dm$$

$$\frac{1}{2} - \frac{D^2-m^2}{4D^2}\cdot dD - \frac{m}{2D}\,(d\ell_2 - d\ell_1)$$

$$df' = (\quad)\,dD - \frac{m}{2D}\,d\ell_2 + \frac{m}{2D}\cdot d\ell_1$$

$$\Delta f' = (\quad)\,\Delta D - \frac{m}{2D}\cdot\Delta\ell_2 + \frac{m}{2D}\,\Delta\ell_1.$$

C-IV $\quad X = k\,\dfrac{m}{m'}$ $\quad (m > m'$ et K = constante$)$.

3 masses m_1, m_2, m_3. $\quad m = m_1 - m_2$ et $m' = m_3 - m_2$

$X = K\cdot\dfrac{m_1-m_2}{m_3-m_2}$

$$\frac{\partial X}{m_1} = \frac{K}{m_3-m_2} \qquad \frac{\partial X}{m_2} = -\frac{K\cdot(m_3-m_2) + K(m_1-m_2)}{(m_3-m_2)^2}$$

$$\frac{\partial X}{m_3} = \frac{(m_3-m_2) - K(m_1-m_2)}{(m_3-m_2)^2}$$

$$dX = \cancel{\frac{K(m_3-m_2)+K(m_1-m_2)}{(m_3-m_2)^2}}\ \frac{K}{m_3-m_2}\,dm_1 + \frac{(m_3-m_2)-K(m_1-m_2)}{(m_3-m_2)^2}\cdot dm_3$$

$$- \frac{K(m_3-m_2) + K(m_1-m_2)}{(m_3-m_2)^2}\cdot dm_2$$

$$\Delta X = \frac{K}{m_3-m_2}\cdot\Delta m_1 + \left(1 - \frac{K(m_1-m_2)}{(m_3-m_2)^2}\right)\cdot\Delta m_3 + \left(1 + \frac{m_1-m_2}{(m_3-m_2)^2}\right)\cdot K\cdot\Delta m_2$$

$$\Delta x = \frac{K}{(m_3-m_2)} \cdot \Delta m_1 + \left(1+\frac{m_1-m_2}{(m_3-m_2)^2}\right) K.\Delta m_2 + \left(1 - \frac{K(m_1-m_2)}{(m_3-m_2)^2}\right)\Delta m_3$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta m_1}{(m_1-m_2)} + \left(\frac{m_3-m_2}{K(m_1-m_2)} - \frac{1}{m_3-m_2}\right)\Delta m_2 + \left(\frac{m_3-m_2}{K(m_1-m_2)} + \frac{1}{m_3-m_2}\right)\Delta m_3$$

2e méthode.

$$\frac{dx}{K} = \frac{1}{m'} . dm + m\, d\left(\frac{1}{m'}\right) = \frac{1}{m'} . dm + \left(-\frac{dm'}{m'^2} . \cancel{dm}\right) . m$$

~~Sol. fausse.~~ $\cancel{\frac{\Delta x}{K} = \frac{\Delta m}{m'} + \frac{m}{m'^2} . \Delta m'}$

$$\frac{dx}{K} = \frac{1}{m'}(dm_1 - dm_2) - \frac{m}{m'^2}(dm_3 - dm_2)$$

$$\frac{dx}{K} = \frac{dm_1}{m'} + \left(\frac{m}{m'^2} - \frac{1}{m'}\right) dm_2 - \frac{m}{m'^2}\, dm_3$$

$$\frac{\Delta x}{K} = \frac{1}{m'}\Delta m_1 + \left(\frac{m}{m'^2}-\frac{1}{m'}\right)\Delta m_2 + \left(\frac{m}{m'^2}\right)\Delta m_3$$

3e méthode

$$\log x = \log K + \log m - \log m'$$

$$\frac{dx}{x} = \underbrace{\frac{dK}{K}}_{0} + \frac{dm}{m} - \frac{dm'}{m'} = \frac{dm_1-dm_2}{m} - \frac{dm_3-dm_2}{m'}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dm_1}{m} + \left(\frac{1}{m'} - \frac{1}{m}\right) dm_2 - \frac{dm_3}{m'}$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta m_1}{m} + \frac{m-m'}{m'm}\Delta m_2 + \frac{\Delta m_3}{m'}$$

$S = a \pm b$ $\qquad \Delta S = \Delta a + \Delta b.$

$P = a.b$ $\qquad \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$

$Q = \frac{a}{b}$ $\qquad \frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$

avec a et b variables indépendantes mesurées

C5. $R = \frac{G}{8} \cdot \frac{d^4}{n D^3}$

$$G = \frac{8 n D^3 . R}{d^4}$$

$$\log G = \log R + 3\log D + \log 8n - 4\log d$$

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta R}{R} + 3\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta n}{n} + 4\frac{\Delta d}{d}$$

C6 –

$$n = \frac{\sin \frac{A+D_m}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

~~$A=1{,}0995\ldots$~~

$$\frac{\delta n}{A} = \frac{\frac{A}{2}\cos\frac{A+D_m}{2}\cdot\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{A+D_m}{2}\cdot A\cos\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$\frac{\delta n}{D_m} = \frac{D_m}{2}\sin\frac{A+D_m}{2} \qquad \frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{A+D_m}{2}$$

$$\frac{\delta n}{A} = \frac{3A}{4}\left[\cos\left(\frac{2A+D_m}{2}\right)+\cos\frac{D_m}{2}\right]\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} \qquad -\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{D_m}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$\frac{\delta n}{D_m} = \frac{D_m}{2}\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right)$$

$$dn = \frac{3A}{4\sin^2\frac{A}{2}}\cdot\left[\cos\left(\frac{2A+D_m}{2}\right)+\cos\left(\frac{D_m}{2}\right)\right]\cdot dA + \frac{D_m}{2}\cdot\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right)\cdot dD_m.$$

$$\Delta n = \frac{3A}{4\sin^2\frac{A}{2}}\cdot\left(\cos\frac{2A+D_m}{2}+\cos\frac{D_m}{2}\right)\Delta A + \frac{D_m}{2}\cdot\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right).\Delta D_m.$$

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{3A}{4\sin\frac{A}{2}}\cdot\left(\cos\frac{2A+D_m}{2}+\cos\frac{D_m}{2}\right)\Big/\sin\frac{A+D_m}{2}\cdot\Delta A + \frac{\frac{D_m}{2}\cdot\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right).\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A+D_m}{2}}.\Delta D_m$$

$$\Delta n = \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{A+D_m}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\Delta D_m + \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{D_m}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}.\Delta A$$

$$* \quad \log n = \log \underbrace{\sin\frac{A+D_m}{2}}_{u} - \log \sin\frac{A}{2}$$

$$\frac{dn}{n} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v} = \frac{\cos\alpha.\,d\alpha}{\sin\frac{A+D_m}{2}} - \frac{\cos\frac{A}{2}.\,d\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = \cot\frac{A+D_m}{2}.\frac{dA+dD_m}{2} - \cot\frac{A}{2}\,d\frac{A}{2}.$$

$$= \left(\cot\frac{A+D_m}{2} - \cot\frac{A}{2}\right)d\frac{A}{2} + \cot\frac{A+D_m}{2}.\frac{dm}{2}$$

$$\frac{\Delta n}{n} = \left|\cot\frac{A+D_m}{2} - \cot\frac{A}{2}\right|\frac{\Delta A}{2} + \left|\cot\frac{A+D_m}{2}\right|.\frac{\Delta D_m}{2}$$

$$\text{cas où } \Delta A = \Delta D_m. \Rightarrow \frac{\Delta n}{n} = \cot\frac{A}{2}.\frac{\Delta A}{2}$$

$$* \quad u = \sin\frac{A+D_m}{2} \qquad v = \sin\frac{A}{2}. \qquad du = \cos\frac{A+D_m}{2}.\,d\frac{A+D_m}{2}$$

$$dn = \frac{1}{v}\cdot du - \frac{u}{v^2}.dv \qquad dv = \cos\frac{A}{2}\,d\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{A+D_m}{2}.\,d\frac{A+D_m}{2}.\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} - \frac{\sin\frac{A+D_m}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}.\cos\frac{A}{2}.\,d\frac{A}{2}.$$

$$n = 1{,}6141507 \qquad \frac{\Delta n}{n} = \cot\frac{A}{2}.\frac{\Delta A}{2} = \frac{1}{2}.3\,10^{-4}\times 31{,}5 \simeq 2\ 10^{-4}$$

$$n = 1{,}6141 \pm 0{,}0002$$

II - RELATION ENTRE ACCROISSEMENT ET DIFFERENTIELLE.

1 - Soit la fonction surface d'un carré $y = x^2$ avec $x = x_0 = 100\,cm$ - Calculer l'accroissement δy et la différentielle dy de y pour un accroissement h de la variable x. ~~En déduire la surface approchée du carré~~.

Pour les valeurs suivantes de h : 10 cm - 1 cm - 0,1 cm - 0,01 cm

Calculer numériquement

- δy et dy
- ~~la surface approchée~~

---

2 - De combien augmentent approximativement

- la surface d'un cercle de rayon $x_0 = 15\,cm$ si ce rayon s'allonge de 2 mm ?
- la surface de la sphère de même rayon ?
- le volume de la sphère de même rayon ?

---

3 - En se basant sur la loi d'Ohm $I = \frac{V}{R}$, Calculer les variations de courant dI correspondant aux petites variations de la résistance (V = constante)

Application numérique : $R = 10^3\,\Omega$, $V = 100\,V$ $dR = 5\,\Omega$

---

4 - Calculer

$\sin 1°30'$, $\sin 31°$

B - FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

I - DÉRIVÉES PARTIELLES

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes

$z = x^2 y$ $\quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad z = \log\left(1 + \frac{x}{y}\right)$

$u = \log z$ avec $z = f(x, y)$

II. RELATION ENTRE ACCROISSEMENT ET DIFFERENTIELLE

1 - Deux résistances $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, augmentent respectivement de $0{,}2\,\Omega$ et $0{,}4\,\Omega$ - De combien varie la résistance équivalente lorsqu'elles sont montées

- en série
- en parallèle

L'augmentation de R_1 étant maintenue à $0{,}2\,\Omega$, de combien doit varier la résistance R_2 pour que la résistance équivalente ne varie pas ? (Envisager les 2 associations)

---

2 - La hauteur d'un cylindre est $H = 30\,cm$, le rayon de sa base $R = 10\,cm$. Calculer la variation du volume du cylindre si on augmente H de 3 mm et diminue R de 1 mm.

---

3 - On donne la relation de Descartes $\sin i = n \sin r$ avec $n = 1{,}5$ et $r = 30°$. On augmente n et r respectivement de $dn = 10^{-2}$ et $dr = 0{,}5°$.

Calculer la variation di de i qui en résulte.

---

4 - Une caisse fermée de dimensions extérieures $x_0 = 10$ cm, $y_0 = 8$ cm, $z_0 = 6$ cm est faite en contreplaqué de 2 mm d'épaisseur - Déterminer approximativement le volume du matériau utilisé pour faire la caisse. $dV = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

$\Delta V = 75{,}2\ cm^3$

C - CALCUL D'ERREUR avec $dx = dy = dz = 0{,}4$

1 - Deux résistances R_1 et R_2 sont mesurées avec la même erreur relative p - Calculer l'erreur ~~relative~~ absolue, l'erreur relative sur la résistance équivalente obtenue en associant ces deux résistances en série, puis en parallèle.

---

2. Soit la relation du pendule simple $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (TP n°3 - 1ère série)

Les mesures de l et T donnent

$l = 1{,}000 \pm 0{,}001$ m $\qquad T = 2{,}00 \pm 0{,}01$ s

Calculer
- la valeur de g
- l'erreur absolue Δg sur la valeur mesurée de g
- l'erreur relative $\frac{\Delta g}{g}$

---

3 - La distance focale image f' d'une lentille par la méthode de Bessel (TP n°9 - 1ère série) est donnée par la formule

$$f' = \frac{D^2 - m^2}{4D} \quad \text{avec} \quad m = l_2 - l_1$$

(les grandeurs indépendantes mesurées étant D, l_1 et l_2).
Évaluer l'erreur absolue $\Delta f'$.

---

4 - La densité d'un solide par rapport à un liquide est donnée (TP n°1 - 1ère série) par la relation

$$X = k\frac{m}{m'} \qquad (m > m' \text{ et } k = \text{constante})$$

où m et m' s'expriment en fonction de 3 masses m_1, m_2, m_3 :

$m = m_1 - m_2 \quad$ et $\quad m' = m_3 - m_4$

Calculer ΔX et $\frac{\Delta X}{X}$

Que deviennent ces expressions lorsque $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m_3 = \Delta m$?

---

5 - Le coefficient de raideur k d'un ressort est relié au coefficient de rigidité G du matériau constituant le ressort par la relation (TP n°3 1ère série)

$$k = \frac{G}{8}\,\frac{d^4}{n D^3}$$

d : diamètre du fil
D : diamètre moyen d'une spire
n : nombre de spires

Calculer $\frac{\Delta G}{G}$.

---

6 - Au minimum de déviation, l'indice d'un prisme est donné par la relation

$$n = \frac{\sin\frac{A + D_m}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

A : angle du prisme $= 63° \pm 1'$

D_m : déviation minimum. $= 52° \pm 1'$

Calculer n, Δn et $\frac{\Delta n}{n}$

I.U.T de CAEN
Mesures Physiques
1983-1984 — 1ère année

EPREUVE DE MESURES

Durée : 2 heures - sans document.

- VOUS DEVEZ EFFECTUER UN CALCUL D'ERREUR LITTERAL POUR LES QUESTIONS II - III et IV.
- TOUS LES RESULTATS NUMERIQUES DEMANDES DOIVENT ETRE PRESENTES SOUS LA FORME SUIVANTE :

$$x \pm \Delta x \qquad \text{Précision : } \frac{\Delta x}{x} =$$

I - La période T d'un pendule composé est donnée par $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m.g.a}}$ où :

J est le moment d'inertie du pendule par rapport à son axe de rotation
m est la masse du pendule
g est l'accélération de la pesanteur
a est une longueur caractéristique

Déterminer l'équation aux dimensions du moment d'inertie J en fonction des grandeurs fondamentales du Système International.

II - Application de la loi de la réfraction $\sin i = n \sin r$

On mesure : $\begin{cases} i = 60° \pm 1' \\ r = 34° \pm 3' \end{cases}$

Calculer l'indice n.

III - La puissance électrique P fournie par une portion de circuit comportant un générateur de force électromotrice E et de résistance interne R est donnée par $P = EI - RI^2$.

On mesure : $\begin{cases} I = (0,98 \pm 0,01)\ A \\ R = (1,10 \pm 0,05)\ \Omega \\ E = (60,0 \pm 0,1)\ V \end{cases}$

Calculer la puissance P.

.../...

IV - Lors d'une expérience, on calcule le moment d'inertie J d'un pendule par la formule suivante :

$$J = 2mr^2 . \frac{T^2}{T'^2 - T^2}$$

$$\text{On mesure} \begin{cases} m = (10,000 \pm 0,005) \text{ g} \\ r = (8,00 \pm 0,02) \text{ cm} \\ T = (9,63 \pm 0,01) \text{ s} \\ T' = (10,14 \pm 0,01) \text{ s} \end{cases}$$

1 . Donner l'expression littérale de l'erreur relative $\frac{\Delta J}{J}$ (le détail du calcul devra figurer sur la copie)

2 . - Calculer numériquement $\frac{\Delta J}{J}$

- Indiquer quelles sont les mesures auxquelles l'expérimentateur doit apporter un grand soin pour diminuer $\frac{\Delta J}{J}$.

3 . Donner le résultat final.